

ПРИМЕНЕНИЕ АССОЦИИРОВАННЫХ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНЫХ ПЛАСТИН

Отримано асоційовані матриці та розроблено методику їх застосування у розрахунку коливань нерозрізних пластин з неперервним розподіленням мас і різними граничними умовами. Наведено також рішення щодо власних коливань ортотропної плити з урахуванням інерції обертання, зсувів та поздовжніх сил.

Получены ассоциированные матрицы и разработана методика их применения к расчету колебаний неразрезных пластин с непрерывным распределением масс и различными граничными условиями. Приведены также решения для собственных колебаний ортотропной плиты с учетом инерции вращения, сдвигов и продольных сил.

The associated matrices are obtained and the technique of their application for calculation of continuous plate vibration with continuous distribution of mass and various boundary conditions is developed. The solutions for free vibrations of orthotropic plate taking into account the rotation inertia, shears and longitudinal forces are also presented.

Неразрезные плиты и пластины входят в состав многих инженерных и технических сооружений. В частности, можно отметить их использование при моделировании пролетных строений мостов и элементов корпусных судовых конструкций. В данной работе исследуются поперечные колебания прямоугольных жестких пластин или тонких плит при условии малости прогиба по отношению к толщине с использованием обычно вводимых при этом допущений [1, 2]. Расчет таких систем будем проводить с помощью метода начальных параметров и ассоциированных матриц [3], а построение уравнений частот – с использованием теории конечных автоматов и элементов математической логики [4].

Введем прямоугольную систему координат xyz . Оси x и y расположены в срединной плоскости пластины, ось z направлена вертикально вверх. Два противоположных края пластины (при $y=0$ и $y=l_2$) приняты шарнирно опертыми или имеют скользящую заделку, другие стороны (при $x=0$ и $x=l_1$) закреплены произвольным образом.

Рассмотрим участок пластины переменной толщины в направлении оси x , ограниченный сечениями $k-1, k$, длиной l_k . Толщина пластины в пределах каждого участка считается постоянной. В общем случае сечение характеризуется компонентами линейного и углового перемещений и компонентами внутренних усилий и моментов, которые образуют вектор состояния S , включающего вектор перемещений

u и вектор усилий q . Концевые граничные параметры k -го участка p -пролетной неразрезной пластины связаны с начальными параметрами этого же участка следующим соотношением:

$$S_k = S_{k-1} B_{tk}, \quad (1)$$

где B_{tk} – транспонированная матрица влияния или переходная матрица участка пластины.

С учетом решения дифференциального уравнения собственных колебаний k -го участка пластины [3], матрицу B_{tk} представим в блочной форме:

$$B_{tk} = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} u \\ q \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u \\ q \end{array} & \begin{array}{c|c} B_{uu} & B_{uq} \\ \hline B_{qu} & B_{qq} \end{array} & \end{array} \quad (2)$$

Следует заметить, что векторы переменных в (2), записанные по вертикали и горизонтали, относятся к различным краям пластины.

Подматрицы блочной матрицы B_{tk} определяются выражениями

$$\left. \begin{array}{l} B_{uu} = \begin{array}{c|c} S_1 & V_2 \\ \hline T_3 & S_1 \end{array}; \quad B_{uq} = \begin{array}{c|c} U_2 & T_2 \\ \hline V_2 & U_2 \end{array}; \\ B_{qu} = \begin{array}{c|c} U_1 & T_1 \\ \hline V_1 & U_1 \end{array}; \quad B_{qq} = \begin{array}{c|c} S_2 & V_3 \\ \hline T_1 & S_2 \end{array}. \end{array} \right\} \quad (3)$$

В состав элементов подматриц B_{tk} входят функции [3, 5]:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (a^2 \operatorname{ch} d + d^2 \cos a); & S_2 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^2 \operatorname{ch} d + a^2 \cos a); & T_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (d \operatorname{sh} d + a \sin a); \\ T_2 &= a^2 d^2 U_1; & T_3 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{a^2}{d} \operatorname{sh} d + \frac{d^2}{a} \sin a \right); & U_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (\operatorname{ch} d + \cos a); & U_2 &= a^2 d^2 U_1; \\ V_1 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{d} \operatorname{sh} d - \frac{1}{a} \sin a \right); & V_2 &= a^2 d^2 V_1; & V_3 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^3 \operatorname{sh} d - a^3 \sin a), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\Delta^2 = a^2 + d^2$; $a^2 = \lambda^2 - \beta_i^2$; $d^2 = \lambda^2 + \beta_i^2$;
 $\lambda^4 = \mu \omega^2 l^4 / D$ – частотный параметр;
 $\beta_i = l \pi i / l_2$, $i = 1, 2, 3, \dots$; $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $\mu = \rho h$ – масса пластины на единицу площади; ρ – плотность материала; h – толщина пластины; ω – круговая частота колебаний (индекс k опущен).

Для параметров a , d отметим следующие зависимости:

$$a^2 + d^2 = 2\lambda^2; \quad a^2 - d^2 = -2\beta_i^2; \quad ad = \lambda^4 - \beta_i^4. \quad (5)$$

Т.к. рассматриваются только поперечные колебания [4], то возможным состояниям пластины при однородных граничных условиях соответствуют частотные определители из миноров 2-го порядка матрицы B_{ik} , которые могут быть представлены в составе ассоциированной матрицы M_k . Выполняя многочисленные функциональные преобразования и принимая во внимание соотношения (5), представим матрицу M_k в табл. 1, где каждый элемент записан в порядке логического следования кодов начальных (НП) и конечных (КП) граничных параметров пластины. Значение $1/\Delta^4$ является общим множителем матрицы M_k .

Таблица 1
Ассоциированная матрица M_k

КП \ НП	0011	0101	0110	1001	1010	1100
1100	E_1	A_3	H_2	F_2	C_3	G_4
1010	C_1	D_1	A_2	A_3	B_2	C_3
1001	F_1	C_1	E_2	G_3	A_3	F_2
0110	H_1	C_2	G_2	E_2	A_2	H_2
0101	A_1	B_1	C_2	C_1	D_1	A_3
0011	G_1	A_1	H_1	F_1	C_1	E_1

Входящие в состав ассоциированной матрицы M_k элементы определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a - f_s \operatorname{sh} d \cos a); \\ A_3 &= -a^2 d^2 A_1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $s = 1$, $k_1 = \frac{1}{a}$, $f_1 = \frac{1}{d}$; $s = 2$, $k_2 = -d^3$,
 $f_2 = -a^3$.

$$\left. \begin{aligned} C_s &= \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a + f_s \operatorname{sh} d \cos a); \\ C_3 &= -a^2 d^2 C_1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $s = 1$, $k_1 = d$, $f_1 = a$; $s = 2$, $k_2 = \frac{d^2}{a}$,

$$f_2 = \frac{a^2}{d}.$$

Для функций B_1 , B_2 , D_1 можно записать:

$$B_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a; \quad B_2 = -a^2 d^2 B_1; \quad (8)$$

$$D_1 = \Delta^4 \operatorname{ch} d \cos a. \quad (9)$$

В свою очередь, функции F_1 , F_2 и H_1 , H_2 определяются выражениями:

$$F_1 = 2ad \operatorname{sh} d \sin a + \gamma; \quad F_2 = -a^2 d^2 F_1; \quad (10)$$

$$H_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a - \gamma; \quad H_2 = -a^2 d^2 H_1, \quad (11)$$

где $\gamma = (a^2 - d^2)(1 - \operatorname{ch} d \cos a)$.

Наконец, функции G_s и E_s приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} G_s &= k_s (1 - \operatorname{ch} d \cos a) + f_s \operatorname{sh} d \sin a; \\ G_3 &= -a^2 d^2 G_1; \quad G_4 = -a^2 d^2 G_3, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $s = 1$, $k_1 = 2$, $f_1 = \frac{d}{a} - \frac{a}{d}$; $s = 2$,

$$k_2 = -2a^2 d^2, \quad f_2 = a^2 d^2 \left(\frac{d^3}{a^3} - \frac{a^3}{d^3} \right).$$

$$E_s = \gamma_s + k_s \operatorname{ch} d \cos a + f_s \operatorname{sh} d \sin a, \quad (13)$$

где $s = 1$, $\gamma_1 = a^4 + d^4$, $k_1 = 2ad$,

$$f_1 = ad(a^2 - d^2), \quad s = 2, \quad \gamma_2 = k_1, \quad k_2 = \gamma_1, \\ f_2 = f_1.$$

Таким образом, матрица M_k содержит в качестве элементов определителя частот свободных колебаний одиночной пластины и характеризует 36 возможных ее состояний и комбинаций граничных условий для $x=0$ и $x=l_1$ при фиксированных закреплениях сторон при $y=0$ и $y=l_2$.

К примеру, для пластины, один край которой заделан, другой – шарнирно оперт, уравнение частот определяется непосредственно элементом матрицы M_k табл. 1 с кодами 0011/0101, удовлетворяющими граничным условиям по концам пластины (для $x=0$ и $x=l_1$):

$$\frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{ch} d \sin a - \frac{1}{d} \operatorname{sh} d \cos a \right) = 0, \quad (14)$$

или
$$\frac{1}{a} \operatorname{tg} a - \frac{1}{d} \operatorname{th} d = 0. \quad (15)$$

Для пластины, у которой два противоположных края заделаны (коды 0011/0011), а два других – шарнирно оперты, уравнение частот примет вид:

$$\frac{1}{\Delta^4} \left[2(1 - \operatorname{ch} d \cos a) - \frac{a^2 - d^2}{ad} \operatorname{sh} d \sin a \right] = 0, \quad (16)$$

или для симметричных и кососимметричных форм колебаний

$$\left(d \operatorname{th} \frac{d}{2} + a \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \left(d \operatorname{cth} \frac{d}{2} - a \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

Уравнения (14) – (17) в точности совпадают с решениями, приведенными в работах [2, 5].

Другие возможные состояния пластины, определяемые комбинациями граничных условий из трех произвольных или фиксированных и, соответственно, одним фиксированным или произвольным НП и КП (всего 16 состояний), будут характеризоваться частотными определителями из миноров 3-го порядка матрицы B_{ik} . Анализируя все полученные миноры, можно прийти к выводу, что каждый из них тождественен определенному элементу матрицы влияния, построенной по технической теории изгибных колебаний. Это же свойство характерно и для миноров 1-го порядка матрицы B_{ik} . Располагая элементы матрицы (2) в соответствии с кодами НП/КП, получим ассоциированную матрицу R_k (табл. 2) с функциями (4).

Ассоциированная матрица R_k

КП \ НП	0111	1011	1101	1110
НП	0001	0010	0100	1000
1000 1110	$S_1(\lambda)$	$V_2(\lambda)$	$U_2(\lambda)$	$T_2(\lambda)$
0100 1101	$T_3(\lambda)$	$S_1(\lambda)$	$V_2(\lambda)$	$U_2(\lambda)$
0010 1011	$U_1(\lambda)$	$T_1(\lambda)$	$S_2(\lambda)$	$V_3(\lambda)$
0001 0111	$V_1(\lambda)$	$U_1(\lambda)$	$T_1(\lambda)$	$S_2(\lambda)$

Для p -пролетной неразрезной пластины переменной толщины в направлении оси x уравнение частот можно выразить в виде последовательного произведения ассоциированных матриц [6] каждого из p участков системы

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k \tilde{V}_p = 0, \quad (18)$$

где V_1 и \tilde{V}_p – матрица-строка и матрица-столбец 1-го и p -го участков.

Для простых случаев нет необходимости в построении таблиц переходов автомата, достаточно воспользоваться только анализом графа системы. К примеру, если в сечениях пластины 1, 2, ..., $p-1$ (вдоль оси y) поставлены абсолютно жесткие опоры, то подграф k -го участка пластины примет вид, как на рис. 1.

Несложно заметить, что в каждом сечении между участками пластины возможны два варианта граничных условий и, следовательно, четыре состояния любого из подавтоматов A_2, A_3, \dots, A_{p-1} . Топологический код k -го подавтомата можно представить квадратной матрицей кодов второго порядка

$$C(G_k) = \|\sigma_k\|_1^2, \quad (19)$$

где $\sigma_{11} = [0101/0011]$, $\sigma_{12} = [0101/0101]$, $\sigma_{21} = [0011/0011]$, $\sigma_{22} = [0011/0101]$.

Соответствующая ассоциированная матрица M'_k с учетом кодов σ_k (табл. 1)

$$M'_k = \begin{array}{c|cc|c} \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \begin{array}{c} 0011 \\ 0101 \end{array} & \begin{array}{c} 0101 \\ 0011 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} 0101 \\ 0011 \end{array} & \begin{array}{c} A_1(\lambda_k) \\ G_1(\lambda_k) \end{array} & \begin{array}{c} B_1(\lambda_k) \\ A_1(\lambda_k) \end{array} & \frac{1}{\Delta_k^4} \end{array} \quad (20)$$

В зависимости от условий закрепления первого и последнего участков пластины опреде-

ляются функции векторов V_1 и \tilde{V}_p в уравнении (18). К примеру, если левый край пластины (при $x=0$) заделан $\sigma_1 = \{0011/0011 \ 0011/0101\}$,

а правый (при $x = \sum_{k=1}^p l_k$) – свободен

$\sigma_p = \{0101/1100 \ 0011/1100\}$, то

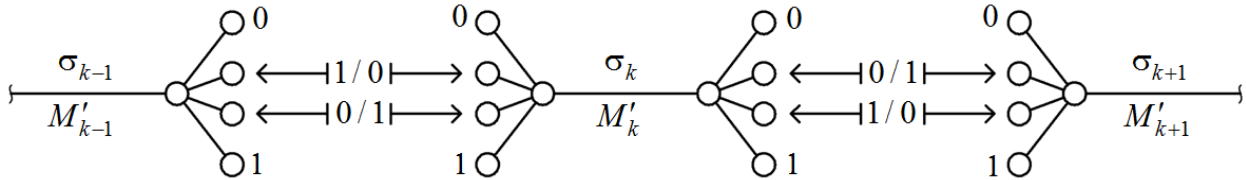


Рис. 1. Подграф k -го участка неразрезной пластины на жестких опорах

Предположим, что в k -м сечении пластины размещены упругие опоры (ребро жесткости) относительно поперечных перемещений жесткостью c_k , отнесенной к единице длины сечения, а также равномерно распределенная по сечению сосредоточенная масса интенсивностью m_k . В этом случае решения будут аналогичными полученным для балок, имеющих сосредоточенные включения в распределенные параметры [6]. Так, выражение для ассоциированной матрицы участка пластины Y_k^c , учитывающей наличие упругих опор на левом крае, с учетом обозначений [6] можно представить в виде:

$$Y_k^c = M_k + \tilde{c}_k M_k^c, \quad (22)$$

где $M_k^c = M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)}$; $\tilde{c}_k = c_k - m_k \omega^2$.

Для участка пластины с упругими опорами относительно поворота сечения жесткостью q_k матрица Y_k^q преобразуется к виду:

$$Y_k^q = M_k + \tilde{q}_k M_k^q, \quad (23)$$

где $M_k^q = M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(5)}$; $\tilde{q}_k = q_k - J_{km} \omega^2$.

Соответствующая матрица Y_k^{cq} для участка пластины с опорами, упругими относительно поперечных и угловых перемещений, и равномерно распределенной по сечению сосредоточенной массы на левом конце имеет вид:

$$Y_k^{cq} = M_k + \tilde{c}_k M_k^c + \tilde{q}_k M_k^q + \tilde{c}_k \tilde{q}_k M_k^{cq}, \quad (24)$$

где $M_k^{cq} = M_{0011}^{(1)}$.

Тот же результат получим путем раскрытия миноров второго порядка матрицы R_k^{cq} , элементы которой также используются в расчетах

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\Delta_1^4} \left\| G_1(\lambda_1) \ A_1(\lambda_1) \right\|; \\ \tilde{V}_p &= \frac{1}{\Delta_p^4} \left\| A_3(\lambda_p) \right\| \\ & \left\| E_1(\lambda_p) \right\|. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

вынужденных колебаний и построении форм собственных колебаний неразрезных плит [7]

$$R_k^{cq} = R_k + \tilde{c}_k R_{0001}^{(1)} + \tilde{q}_k R_{0010}^{(2)}, \quad (25)$$

где R_k – ассоциированная матрица четвертого порядка обычного участка пластины (табл. 2); $R_{0001}^{(1)} = R_{1110}^{(1)}$; $R_{0010}^{(2)} = R_{1011}^{(2)}$.

В целом, когда имеются сосредоточенные включения различных типов [6], ассоциированные матрицы участков могут быть получены, пользуясь принципом наложения. При этом уравнения частот, которые описывают ту или иную систему, будут иметь один и тот же вид (18). Для более сложных случаев необходимо составлять таблицы переходов с кодами НП, КП каждого участка пластины.

Здесь же рассмотрим собственные колебания ортотропной плиты с учетом инерции вращения, сдвигов и продольных сил. Используем решения [8] для системы шарнирно опертых пересекающихся балок на сплошном упругом основании:

$$\frac{\sigma_1 + 2\beta_i^2 q_1}{\lambda_{1i}^4 \sigma_1 + 2\beta_i^2 \nu_1 - \beta_i^4} + \frac{B_2}{B_1} \left[\frac{\sigma_2 + 2\beta_j^2 q_2}{\lambda_{2j}^4 \sigma_2 + 2\beta_j^2 \nu_2 - \beta_j^4} \right] = 0, \quad (26)$$

где $B_1 = l_1^3 / E_1 J_1$, $B_2 = l_2^3 / E_2 J_2$ – коэффициенты, характеризующие жесткости продольных и поперечных балок.

Представим систему взаимно перпендикулярных регулярных балок [8] как набор взаимно ортогональных балочек-полосок прямоугольного сечения высотой h , связанных между собой распределенными упругими связями в виде обычного Винклеровского основания. Частотный параметр λ_{se}^4 содержит, кроме ко-

эфициента толкающей связи $\mu_s \omega_{ij}^2$, возникающей от сил инерции при свободных колебаниях, еще коэффициент k_n упругого основания [9], который принимает тот или иной знак в зависимости от того, какое из направлений балок будет поддерживающим по отношению к балкам другого направления.

После перехода от жесткости балки при изгибе к цилиндрической жесткости пластины $D_s = E_s h^3 / 12(1 - \nu_1' \nu_2')$, а также с учетом, что $\mu_s = h\rho/2$, $l_2 = l_1 = l$, уравнение (26) при $\sigma_s = 1$, $\nu_s = 0$, $q_s = 0$ примет вид:

$$\frac{\beta_j^4 - \frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_1^4}{2D_2} + \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_1^4}{D_2}}{\frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_2^4}{2D_1} - \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_2^4}{D_1} - \beta_i^4} = \frac{B_2}{B_1}, \quad (27)$$

где ν_1' , ν_2' – коэффициенты Пуассона в осевых направлениях плиты, ρ – плотность материала плиты, $D_3 = D_1 \nu_2' + 2D_k$, $D_k = Gh^3/12$, G – модуль упругости при сдвиге, $\beta_{1i} = \pi i/ml$; $\beta_{2j} = \pi j/nl$.

Решая уравнение (27) относительно ω_{ij}^2 , приходим к известному результату [9] для собственных колебаний ортотропной плиты

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} (\beta_{1i}^4 D_1 + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 + \beta_{2j}^4 D_2). \quad (28)$$

Если в срединной плоскости плиты действуют продольные силы, то

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2j}^4 D_2 + \beta_{1i}^2 (\beta_{2j}^2 D_3 \pm N_1) + \beta_{2j}^2 (\beta_{1i}^2 D_3 \pm N_2) \right]. \quad (29)$$

Аналогичным образом из уравнения (26) получим выражения (30), (31) для определения круговой частоты ω_{ij} с учетом, соответственно:

- инерции вращения

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2i}^4 D_2}{1 + \frac{r^2}{2} (\beta_{1i}^2 + \beta_{2j}^2)} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right]; \quad (30)$$

- деформации сдвига

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\beta_{1i}^4 D_1}{1 + \beta_{1i}^2 \frac{D_1 k h^2}{12 D_k}} + \frac{\beta_{2i}^4 D_2}{1 + \beta_{2j}^2 \frac{D_2 k h^2}{12 D_k}} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right], \quad (31)$$

где k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Т.к. приведенные результаты получены путем предельного перехода для двух систем взаимно перпендикулярных балочек-полосок, то можно с помощью такого же подхода решить и некоторые другие частные задачи комбинаций неразрезных балок: плит, подкрепленных регулярной сеткой ребер, неразрезных плит или пакетов плит, соединенных между собой равножесткими линейно-упругими безынерционными связями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коренев, Б. Г. Справочник по динамике сооружений [Текст] / Б. Г. Коренев, И. М. Рабинович. – М.: Стройздат, 1972. – 511 с.
2. Справочник по строительной механике корабля [Текст]: в 3 т. / под ред. Г. В. Бойцова. – Л.: Судостроение, 1982. – 320 с.
3. Ивович, В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем [Текст] : справ. / В. А. Ивович. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
4. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – Д. Вид-во ДНУЗТ, 2007. – С. 125-133.
5. Новацкий, В. Динамика сооружений [Текст] / В. Новацкий. – М.: Гостройиздат, 1963. – 376 с.
6. Распопов, О. С. Поперечні коливання континуально-дискретних балок на суцільній пружній основі [Текст] / О. С. Распопов // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. пр. / Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2008. – Вип. 10. – С. 183-193.
7. Распопов, О. С. Особливості моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінчених автоматів [Текст] / О. С. Распопов // Дороги і мости : зб. наук. пр. – К.: ДерждорНДІ, 2008. – Вип. 8. – С. 229-236.
8. Распопов, А. С. К расчету поперечных колебаний пересекающихся балок с распределенными параметрами [Текст] / А. С. Распопов // Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1993. – С. 90-94.
9. Варвак, П. М. Справочник по теории упругости [Текст] / П. М. Варвак, А. Ф. Рябов. – К.: Будівельник, 1971. – 418 с.

Поступила в редколлегию 11.01.2010.
Принята к печати 20.01.2010.