

С. В. КОЛЬЧИК (ДНУ ім. О. Гончара, Дніпропетровськ)

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ КОНСТРУКЦІЙ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ, ЩО ПЕРЕБУВАЮТЬ ПІД ДІЄЮ АГРЕСИВНИХ СЕРЕДОВИЩ

Стаття присвячена проблемі оптимізації параметрів конструкцій, які мають геометричні неоднорідності та перебувають в агресивному середовищі. Для її вирішення був побудований алгоритм спрямованого пошуку, який базується на принципі етапності та включає відомі методи, скомбіновані таким чином, щоб успішно вирішувати складні задачі оптимального проектування транспортних конструкцій під дією агресивних середовищ. В якості ілюстрації наведено приклад пошуку оптимального підкріплення кругового отвору в пластині, що схильна до корозійного зносу.

Статья посвящена проблеме оптимизации параметров конструкций с геометрическими неоднородностями, которые находятся в агрессивной среде. Для её решения был построен алгоритм направленного поиска, который базируется на принципе этапности и включает в себя известные методы, скомбинированные таким образом, чтобы успешно решать сложные задачи оптимального проектирования транспортных конструкций под действием агрессивных сред. В качестве иллюстрации приведен пример поиска оптимального подкрепления кругового отверстия в пластине, подверженной коррозионному износу.

The article is devoted the problem of optimization of parameters of constructions with geometric inhomogeneities, which are in the aggressive environment. For its solution the algorithm of directed search was built based on the stage principle and including the known methods, which are successfully combined to solve the intricate problems of the optimum planning of transport constructions under the aggressive environments action. As an illustration the example of optimum search of circular opening reinforcement in a plate under corrosive wear is considered.

Елементами багатьох транспортних споруд є конструкції, які в процесі експлуатації підлягають не лише дії навантажень, температур, але й хімічно активних середовищ. При цьому, вказані фактори нерідко діють спільно, в найсприятливіших поєднаннях, що приводить до зменшення несучої здатності конструкцій і значного скорочення терміну їх служби. Неврахування впливу агресивних середовищ може приводити до передчасного або аварійного виходу з ладу споруд. В період економічної кризи особливо актуальною стає проблема створення міцних і легких конструкцій, що виготовлені з максимальною економією матеріалу та здатні працювати в агресивних середовищах протягом встановленого терміну служби.

Серед задач оптимального проектування конструкцій під дією агресивних середовищ, що широко досліджуються останнім часом українськими вченими, наприклад, в роботах [1 – 3], задача пошуку оптимальних параметрів конструкцій з геометричними неоднорідностями, такими як отвори, практично не розглянута. Наведена задача є досить складною, коли швидкість корозії залежить від напруг. У цьому випадку зона концентрації напружень поблизу отворів стає ще небезпечнішою внаслідок взаємного впливу механіко-хімічних факторів, що

приводить, як правило, до передчасного виходу конструкції з ладу. Розрахунок довговічності таких споруд є сам по собі громіздкою і нетривіальною задачею, котру при пошуку оптимальних параметрів доводиться вирішувати на кожному кроці оптимізації, що, як правило, складає десятки, а деколи і сотні разів. При великій розмірності задачі це може бути серйозною проблемою, яка вимагає значних обчислювальних ресурсів, що не завжди можливо. Вживання існуючих оптимізаційних алгоритмів, адаптованих під вирішення широкого класу завдань пошуку оптимальних параметрів конструкцій під впливом агресивних середовищ, стає неефективним для оптимізації конструкцій з геометричними неоднорідностями.

Тому *ціллю даної статті* є визначення оптимальних параметрів конструкцій з геометричними неоднорідностями типу підкріплених отворів, що перебувають під дією агресивних середовищ, за допомогою розробленого ефективного оптимізаційного алгоритму, який найбільш повно враховує особливості задач наведеного класу.

Для прямокутної пластини з круговим отвором, підкріпленим двосторонніми ребрами постійної товщини, що розтягнута рівномірно розподіленим навантаженням q_x (рис. 1) і пе-

ребуває в агресивно-активному середовищі, де швидкість корозії залежить від напруженого стану конструкції, формулюється наступна оптимізаційна задача: знайти таку форму підкріплювальних ребер, щоб обсяг їх матеріалу був мінімальним, але при заданому навантаженні інтенсивність напружень у момент часу $[t]$ не перевищила припустимої величини.

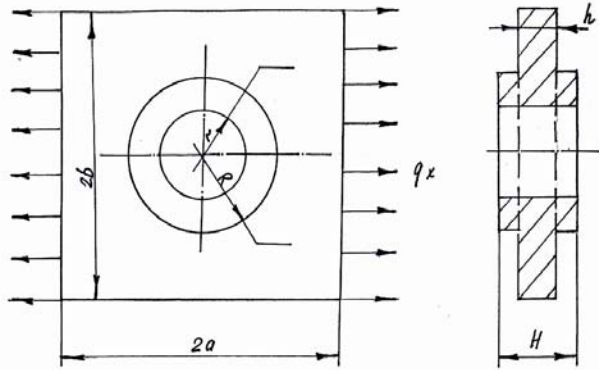


Рис. 1. Пластина з круговим отвором, підкріпленим двосторонніми ребрами постійної товщини

Постановка задачі оптимального проектування у формі задачі нелінійного математичного програмування записується у вигляді:

$$G(\bar{x}) \rightarrow \min ; \quad (1)$$

$$g_i(\bar{x}, t) \geq 0 ; \quad (2)$$

$$x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, \quad i = \overline{1, M}, \quad (3)$$

де $G(\bar{x})$ – цільова функція;

$g_i(\bar{x}, t)$ – обмеження по міцності, які залежать від часу t ;

$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – вектор змінюваних параметрів;

x_i^-, x_i^+ – верхня і нижня границі конструктивних обмежень;

M – кількість змінюваних параметрів.

Вважаємо, що розрахунок міцності конструкції у будь-який момент часу проводиться методом скінченних елементів.

При проектуванні підкріплення отвору в пластинах, як правило, мінімум маси (або його обсягу) відшукується за рахунок варіації товщин елементів при незмінній формі підкріплення. Однак, у ряді випадків з конструктивних, функціональних або технологічних розумінь доцільно прийняти постійною товщину підкріплення, а якість конструкції поліпшити за рахунок зміни форми підкріплення таким чином, щоб конструкція могла безаварійно експлуатуватися в агресивному середовищі заданий час.

платуватися в агресивному середовищі заданий час.

Постановка задачі (1)–(3), де змінюваними параметрами виступають координати вузлів зовнішньої границі підкріплення, записується у наступному вигляді:

$$G(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m F_{0j}(\bar{x})(h_{0j} - h_0) \rightarrow \min; \quad (4)$$

$$\sigma_i^* \leq \sigma, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$\min\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*\} \geq [t]; \quad (6)$$

$$\bar{x}_0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_k, \quad (7)$$

де $G(\bar{x})$ – обсяг підкріплення;

F_{0j} – площа j -го скінченного елемента в початковий момент часу;

h_{0j} – товщина j -го скінченного елемента, що відноситься до підкріплення, у початковий момент часу;

\bar{x} – вектор координат елементів, що апроксимують підкріплення;

\bar{x}_0, \bar{x}_k – нижня і верхня границі вектора \bar{x} ;

h_0 – початкова товщина пластини;

σ – допустимі напруження;

$t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$ – час вичерпання несучої здатності елементів конструкції;

$[t]$ – припустимий час експлуатації конструкції;

σ_i^* – еквівалентні напруження в i -тому скінченному елементі в час $[t]$;

n – кількість елементів у скінченно-елементній апроксимації;

m – кількість елементів, що апроксимують підкріплення.

Для розв'язування поставленої задачі пропонується використовувати принцип етапності [5], що полягає в розкладанні вихідної складної задачі на простіші, послідовний розгляд яких приводить до вирішення поставленої.

Для цього задача оптимального проектування конструкцій може бути розбита на наступні етапи: 1) вибір початкового наближення; 2) побудова початкової області пошуку; 3) спуск на обмеження; 4) рух до екстремуму.

Перший етап. При виборі початкового наближення доцільними є прийоми, застосовувані у проективній практиці: використання даних про прототипи конструктивних рішень; використання нормативних вимог; розгляд і аналіз більш спрощених схем з метою варіантного вибору основних параметрів, що істотно впли-

вають на зміну цільової функції й обмежувальних функцій.

Основними вимогами, що пропонуються до початкового наближення, є його приналежність області пошуку (виконання всіх обмежень) та менша відстань між початковим наближенням x^- і точкою оптимуму x^* .

Другий етап. Як правило, область пошуку вибирається на основі фізичних міркувань, досвіду проектування та інженерної інтуїції. У даній постановці вона визначається конструктивними обмеженнями.

Третій етап. Спуск на обмеження пропонується здійснювати за допомогою методів спрямованого пошуку. Найбільш ефективним і простим у реалізації представляється метод градієнтного спуску [6]:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \tau^{(k)} \frac{\nabla G(x)}{\|\nabla G(x)\|} \Big|_{x=x^{(k)}}, \quad \tau^{(k)} > 0; \quad (8)$$

$$\nabla G(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial G(x)}{\partial x_n} e_n; \quad (9)$$

$$\|\nabla G(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\partial G(x)/\partial x_i)^2}, \quad (10)$$

де $\nabla G(x)$ – градієнт цільової функції $G(x)$;

$1/\|\nabla G(x)\|$ – нормуючий множник;

$\tau^{(k)}$ – величина кроку у напрямку антиградієнта цільової функції;

k – номер ітерації;

e_i – базисні вектори.

На відміну від традиційного метода градієнтного спуску, пропонується перевіряти обмеження в $(2^k + 1)$ точках, зберігаючи інформацію в двох останніх із них. Якщо усі функції обмежень в останній точці пошуку задовольняють обмеженням, то спуск продовжується, у протилежному випадку в межах останнього інтервалу вибирається третя точка з номером 2^k , у якій перевіряються обмеження. Перевірка обмежень тільки в зазначених точках дозволяє скоротити обчислення в $\frac{2^k + 1}{k + 2}$ раз у порівнянні з традиційним підходом [5].

На основі інформації, отриманої з використанням методу градієнтного спуску, здійснюється локалізація точки, що знаходиться поблизу активного обмеження. Для цього будується інтерполяційний поліном, що апроксимує значення обмежень у останніх трьох точках у на-

прямку найшвидшого зменшення цільової функції:

$$P(H) = a_0 + a_1 H + a_2 H^2. \quad (11)$$

Використовуючи значення функції обмежень g_m ($m = \overline{0, 2}$) у вузлах $H_0 = 0$, $H_1 = h$, $H_2 = \zeta h$, можна однозначно знайти коефіцієнти полінома a_0, a_1, a_2 :

$$a_0 = g_0; \quad (12)$$

$$a_1 = \frac{g_1 \zeta^2 - g_2 - g_0(\zeta^2 - 1)}{\zeta h(\zeta - 1)}; \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{g_1 \zeta - g_2 - g_0(\zeta - 1)}{\zeta h^2(1 - \zeta)}, \quad (14)$$

де ζ – відома величина.

Тоді положення точки пошуку на активному обмеженні (або обмеженнях) визначається як

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{h^*}{\|\nabla G(x)\|} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(k)}}, \quad (i = \overline{1, M}), \quad (15)$$

де

$$h^* = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}. \quad (16)$$

Четвертий етап. Після того, як поверхня обмеження досягнута, необхідно вибрати напрямки руху в локальний екстремум. Для цього може бути використано метод проекції градієнта. Цей метод, як відомо [6], містить у собі два етапи: етап найбільшого зменшення цільової функції уздовж дотичної гіперплощини до активного нелінійного обмеження; етап відновлення з метою задоволення активного обмеження із заданою точністю.

Напрямок найбільш інтенсивного зменшення значень цільової функції $p^{(k)}$ визначається як

$$p_i^{(k)} = r_i^{(k)} - \alpha_i b_i^{(k)}, \quad (i = \overline{1, M}), \quad (17)$$

де $r_i^{(k)} = -\nabla G(x_i^{(k)})$ – антиградієнт цільової функції;

$b_i^{(k)} = \nabla g(x_i^{(k)})$ – градієнт функції обмежень у точці $x_i^{(k)}$;

α_i – коефіцієнт, що обумовлений ортогональністю векторів $b^{(k)}$, $p^{(k)}$ як

$$\alpha_i = \frac{(r_i^{(k)}, b_i^{(k)})}{\|b_i^{(k)}\|^2}, \quad (18)$$

де

$$\|p^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^{(k)})^2}, \quad \|b^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i^{(k)})^2}. \quad (19)$$

Процес руху уздовж напрямку $p^{(k)}$ здійснюється відповідно до наступної формули:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\gamma p_i^{(k)}}{\|p^{(k)}\|}, \quad (20)$$

де γ – величина кроку ($\gamma > 0$).

Якщо хоча одне з обмежень у точці $x_i^{(k+1)}$ не задовольняється, то його відновлення здійснюється шляхом руху із зазначеної точки уздовж напрямку градієнта цільової функції і подальшої локалізації відповідно до запропонованого у статті алгоритму.

На відміну від традиційного методу проекції градієнта, у запропонованому алгоритмі немає необхідності робити точний вихід на поверхню обмежень у випадку їхнього задоволення, досить лише визначити напрямок руху в локальний екстремум. Зазначений напрямок задається у вигляді [6]:

$$x_i^{(k+l+2)} = x_i^{(k+l+1)} + \tau \frac{x_i^{(k+l+1)} - x_i^{(k+l)}}{\|x_i^{(k+l+1)} - x_i^{(k+l)}\|}, \quad (21)$$

$\tau > 0; \quad l = \overline{0, L},$

де L – кількість точок у напрямку t .

Рух уздовж обраного таким чином напрямку здійснюється доти, поки не будуть порушені обмеження або не почнуть зростати значення цільової функції. Обмеження, як і раніше, перевіряються в $(2^k + 1)$ точках ($k = 0, 1, 2, \dots$). При порушенні обмежень використовується описана раніше процедура локалізації точки поблизу активного (активних) з них. У випадку зростання цільової функції в точці $x^{(k)}$ здійснюється повернення в попередню точку $x^{(k-1)}$ і подальший спуск на поверхню обмежень. Потім за допомогою методу проекції градієнта відбувається вибір нового напрямку руху.

Процес пошуку локального екстремуму здійснюється доти, поки не буде виконано одне (або одночасно декілька) з наступних умов:

$$\left| G(x_i^{(k+1)}) \right| > \left| G(x_i^{(k)}) \right| < \left| G(x_i^{(k-1)}) \right| \quad (22)$$

та

$$\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad (23)$$

де ε – задана точність розрахунку.

Складності коректної реалізації такого алгоритму пов'язані, головним чином, із необхідністю багаторазової перебудови сітки скінченних елементів. Така процедура є досить відповідальною, тому що підкріплення не знімає концентрацію напружень повністю, і, отже, існує зона швидкої зміни напружень. Таким чином, на кожному кроці пошуку оптимального проекту необхідно перебудовувати сітку, кількість елементів якої буде змінюватися, і, як наслідок, перевіряти точність отриманого на ній розрахунку, що може виявитися досить трудомісткою задачею. Тому для пошуку оптимальної форми підкріплення отворів у пластинах пропонується не перебудовувати їх розбиття на скінченні елементи, а використовуючи елементи дискретного програмування [6], тобто змінювати границю підкріплення з вузлами початкової сітки, найбільш близькими до знайдених в результаті розв'язування задачі оптимізації. Таким чином, пошук оптимальної форми підкріплення являє собою процес зміни товщин елементів, значення яких на кожному кроці пошуку відомі, при незмінній сітці скінченних елементів. Похибка описаного припущення має порядок кроку сітки. Оскільки в зоні підкріплення внаслідок швидкої зміни напружень використовується досить дрібне розбиття на елементи, похибка застосування такої операції виявляється незначною.

Задамо координати вузлів у полярній системі. Для спрощення розрахунків сітку скінченних елементів побудуємо таким чином, щоб впливом зміни кута повороту можна було зневажити. Після перебування чергової точки у просторі проектування визначаємо приналежність кожного радіусу-вектора шарової сітки і відстань до його границь. Границя шару, відстань до якої є найменшою, стає координатою точки $\bar{x} = \{r_1, r_2, \dots, r_\mu\}$ в просторі проектування.

З урахуванням симетрії розглядається четверта частина пластини. Пластина, що розраховується, мала наступні параметри:

$a = 0,5$ м – половина довжини пластини;

$b = 0,5$ м – половина ширини пластини;

$r = 0,03$ м – радіус отвору;

$R = 0,05$ м – радіус підкріплення;

$h = 0,02$ м – товщина в регулярній частині пластини;

$H = 0,065$ м – товщина пластини в зоні підкріплення;

$E = 2,1 \cdot 10^7$ МПа – модуль пружності;

$\gamma = 0,3$ – коефіцієнт Пуассона;

$\sigma = 2,4 \cdot 10^4$ МПа – припустимі напруження.

Сітка трикутних елементів, що апроксимують зону підкріплення, наведена на рис. 2.

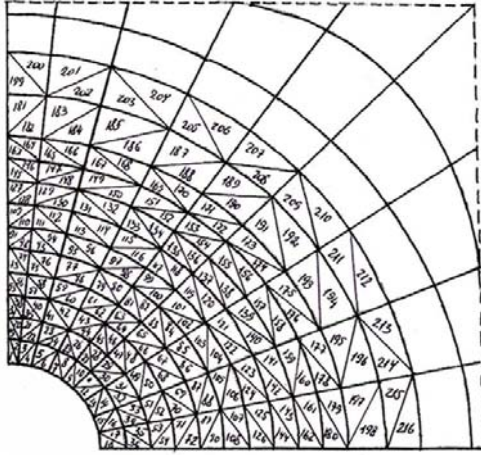


Рис. 2. Розбиття пластини поблизу отвору

Середня площа елементів, що належать зоні підкріплення, склала $0,3 \cdot 10^{-4}$ м². Напруження на кінцях пластини $\sigma_{0,x}$ змінювались в діапазоні від $5,5 \cdot 10^4$ до $7,5 \cdot 10^4$ МПа.

У якості моделі корозійного руйнування матеріалу конструкції була вибрана модель В. М. Долинського [4], де швидкість корозії залежить від напруженого стану конструкції.

Рішення поставленої задачі знайдені для чотирьох значень критичного часу експлуатації конструкції $[t] = 2; 2,5; 3; 3,5$ роки.

Пошук оптимальних проектів зажадав 13...16 кроків залежно від початкових умов (рівня напружень на кінцях пластини та значень критичного часу експлуатації конструкції). Рішення такої задачі методом, що запропонований у статті [3], потребувало втричі або вчетверо більше кроків (залежно від початкових умов), і як наслідок в десятки разів більше обчислювальних ресурсів, тому що на кожному кроці для перевірки обмежень вирішувалась задача довговічності, яка сама по собі є ресурсомісткою, особливо для багаторозмірних задач. Отримані результати дозволяють зробити висновок про ефективність розробленого алгоритму для рішення задач наведеного класу.

Залежність оптимального об'єму підкріплення від рівня навантаження на краях пластини подана на рис. 3. На підставі отриманих результатів можна зробити висновок про те, що зі збільшенням рівня навантаження зменшується

вплив граничного часу експлуатації конструкції на розмір оптимального об'єму.

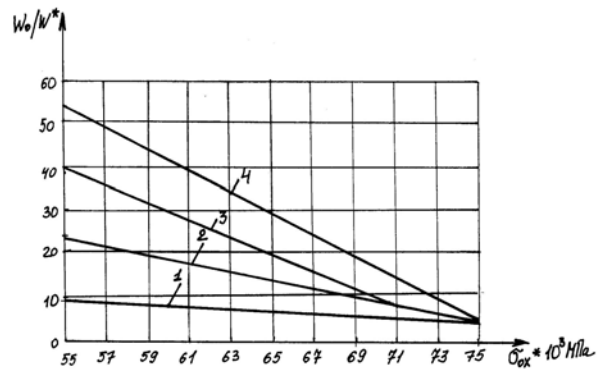


Рис. 3. Залежність оптимального об'єму підкріплення від навантаження на краях пластини:
1 – $[t] = 2$ роки; 2 – $[t] = 2,5$ роки; 3 – $[t] = 3$ роки;
4 – $[t] = 3,5$ роки

Зміни геометрії підкріплення у залежності від розміру крайових напружень наведена на рис. 4 – 5.

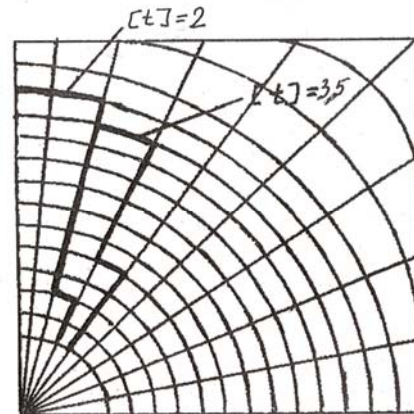


Рис. 4. Геометрія оптимального підкріплення при $7,5 \cdot 10^4$ МПа

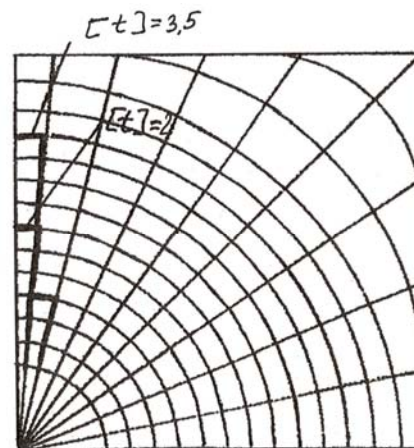


Рис. 5. Геометрія оптимального підкріплення при $5,5 \cdot 10^4$ МПа

Аналіз наведених результатів дозволяє зробити висновок про те, що розмір напружень σ_{0x} практично не впливає на форму оптимального підкріплення при однакових параметрах агресивного середовища, а лише приводить до зміни його площі. Характер зміни форми підкріплення, що досліджений при збільшенні значення припустимого часу $[t]$ та фіксованому рівні навантаження на кінцях пластини, якісно збігається з характером зміни форми, викликаного збільшенням значень навантаження при постійній величині критичного часу $[t]$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Дзюба, А. П. Алгоритм оптимального проектування конструкцій з урахуванням корозійного ураження [Текст] / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко // Математичні проблеми технічної механіки: матеріали Міжн. наук. конф. – Д., Дніпродзержинськ: РВВ ДДТУ, 2007. – 1 с.
2. Дзюба, А. П. Алгоритм оптимального проектування фермових конструкцій при спільній дії силових навантажень та агресивного середовища [Текст] / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко // Математичні проблеми технічної механіки – 2008 : матеріали Міжн. наук. конф. – Д., Дніпродзержинськ: РВВ ДДТУ, 2008. – 1 с.
3. Зеленцов, Д. Г. Адаптация метода скользящего допуска к задачам оптимизации корродирующих конструкций [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Н. Ю. Науменко // Системні технології : регіональний міжвуз. зб. наук. пр. – Вип. 3 (38). – Д., 2005. – С. 48-56.
4. Долинский, В. М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии [Текст] / В. М. Долинский // Исследования по теории оболочек. – Казань, 1976. – Вып. 7. – С. 37-42.
5. Малков, В. П. Оптимизация упругих систем [Текст] / В. П. Малков, А. Г. Угодчиков. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
6. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Надійшла до редколегії 09.10.2009.

Прийнята до друку 20.10.2009.