

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ УПРУГИХ МАССИВОВ РАЗЛИЧНОЙ ШИРИНЫ И ОГРАНИЧЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ИХ ПЛОСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

У статті наведено результати рішення ряду задач плоского деформування пружних нескінченно довгих масивів різної ширини і обмеженої товщини. Розглядаються різні випадки умов на контакті масиву з основою. В рішеннях використані запропоновані автором раніше залежності між напруженим і деформованим станами, відмінні від узагальненого закону Гука.

В статье приведены результаты решения ряда задач плоского деформирования упругих бесконечно длинных массивов различной ширины и ограниченной толщины. Рассматриваются различные случаи условий на контакте массива с основанием. В решениях использованы предложенные автором ранее зависимости между напряженным и деформированным состояниями, отличные от обобщенного закона Гука.

The article presents the results of solving several problems of a flat deformation of elastic infinitely long massifs of different width and limited thickness. Various cases of conditions at the massif/base contact. The relationships between stressed and strained states previously suggested by the author, which differ from the generalized Hooke's law, are used in the solutions.

Настоящая работа является продолжением цикла работ автора по определению напряженно-деформированного состояния упругих массивов с отдельным определением деформаций от чистого формоизменения (чистого сдвига, чистой деформации), который протекает без изменения объема среды, и от изменения ее объема (плотности). Оба вида деформаций независимы друг от друга и подчиняются различным закономерностям [1 – 3]. Напряженное состояние в любой точке упругого массива характеризует потенциальная гармоническая функция давления, представляющая собой среднее давление в точке, которое равно одной трети первого инварианта напряженного состояния:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}J_1.$$

Здесь приводятся результаты решений некоторых задач для массивов ограниченной толщины с различной шириной, опирающихся на жесткое основание, при их плоском деформировании.

Задача № 1. Упругий массив прямоугольного поперечного сечения бесконечной длины на жестком основании. На верхней площадке действует по нормали к ней сила P (Н/м), рассредоточенная по бесконечной линии вдоль массива (рис. 1). Граничные условия на контакте массива с основанием допускают только горизонтальные смещения от чистого сдвига. Ис-

ходя из этого, для функции давления σ граничные условия будут следующими:

- 1) при $z=0$ $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ($W^c = 0$);
- 2) при $z=h$ и $x \neq 0$ $\sigma = 0$;
- 3) при $z=h$ и $x = 0$ $\sigma = \infty$;
- 4) функция должна быть четной относительно координаты x , т.е. $\sigma(x, z) = \sigma(-x, z)$.

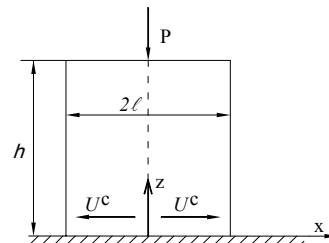


Рис. 1

Это смешанная задача Дирихле-Неймана, решение которой если имеется, то единственное. Решение, удовлетворяющее поставленным условиям, получено [4] в виде:

$$\sigma = \frac{P}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1)h}{2l}}. \quad (1)$$

Для проверки условия, является ли данная функция потенциальной, запишем ее вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2 \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}};$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2 \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}.$$

Очевидно, что сумма вторых частных производных равна нулю, поэтому данная функция является гармонической, потенциальной.

Определение компонент перемещений, вызванных чисто сдвиговыми и объемными деформациями, выполняется по условию [3]:

- перемещения от чистого сдвига:

$$U^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \kappa^c \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}; \quad (2)$$

$$W^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\kappa^c \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}; \quad (3)$$

- вертикальные перемещения от изменения плотности упругой среды:

$$W^0 = \kappa^0 \cdot \int_z^0 \sigma \cdot dz = -\kappa^0 \frac{P}{2\ell} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\ell}{\pi(2n-1)} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}, \quad (4)$$

где κ^c и κ^0 – физические константы среды, соответственно, – модуль чистого формоизменения и модуль объемной деформации.

Для случая нагрузки равномерной интенсивности p (Н/м²), распределенной на беско-

нечной полосе постоянной ширины $2a$, задача определения функции давления решается путем интегрирования (1) в соответствии с рис. 2:

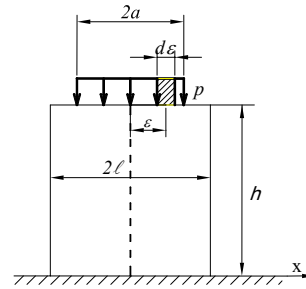


Рис. 2

$$\sigma = \frac{p}{2\ell} \int_{-a}^a \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{\pi(2n-1)(x-\varepsilon)}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} d\varepsilon.$$

После интегрирования и элементарных алгебраических преобразований имеем:

$$\sigma = \frac{p}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell}}{\frac{\pi(2n-1)}{2\ell}} \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (5)$$

По известному значению функции давления определяются перемещения точек массива, вызванные чистым формоизменением:

$$U^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \kappa^c \frac{p}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}; \quad (6)$$

$$W^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\kappa^c \frac{p}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}, \quad (7)$$

а также вертикальные перемещения от изменения объема среды:

$$\begin{aligned}
W^0 &= \kappa^0 \cdot \int_z^0 \sigma \cdot dz = \kappa^0 \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell}}{\frac{\pi(2n-1)}{2\ell}} \times \\
&\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} dz; \\
W^0 &= -\frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell}}{\left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2} \times \\
&\times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Задача № 2. Упругий массив и его загрузка аналогичны задаче № 1, но основание допускает только вертикальные смещения от чистой деформации (рис. 3), т.е. функция давления должна удовлетворять условиям:

- 1) при $z=0$ $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ($U^c = 0$);
- 2) при $z=h$ и $x=0$ $\sigma = \infty$;
- 3) при $z=h$ и $x \neq 0$ $\sigma = 0$;
- 4) $\sigma(x, z) = \sigma(-x, z)$.

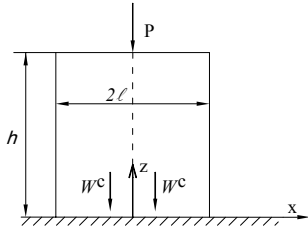


Рис. 3

Функция давления, удовлетворяющая поставленным граничным условиям, получена в виде [4]:

$$\sigma = \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (9)$$

Проверим, является ли она гармонической. Для этого запишем ее вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2 \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2 \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что сумма этих производных равна нулю, поэтому сама функция (9) является гармонической и, следовательно, потенциальной.

Компоненты перемещений среды, вызванные чистым формоизменением, в соответствии с [3] будут:

$$\begin{aligned}
U^c &= -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \kappa^c \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \times \\
&\times \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^c &= -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \times \\
&\times \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Перемещения, вызванные изменением плотности среды, определяются интегрированием (9):

$$W^0 = \frac{\kappa^0 P}{2\ell} \int \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)h}{2\ell}} dz + C;$$

$$\begin{aligned}
W^0 &= \frac{\kappa^0 \cdot P}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\ell}{\pi(2n-1)} \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)h}{2\ell}} dz + C.
\end{aligned}$$

Произвольная интегрирования C определяется из граничных условий: при $z = 0$ $W^0 = 0$. Тогда окончательно имеем:

$$W^0 = -\kappa^0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\ell}{\pi(2n-1)} \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right]. \quad (12)$$

В том случае, когда на поверхности массива будет действовать равномерно распределенная нагрузка p (Н/м²), функция давления определяется интегрированием (9) в соответствии со схемой на рис. 2:

$$\sigma = \frac{p}{2\ell} \int_{-a}^a \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{\pi(2n-1)(x-\varepsilon)}{2\ell} \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} d\varepsilon = \frac{p}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\ell}{\pi(2n-1)} \times \left. \sin \frac{\pi(2n-1) \cdot (x-\varepsilon)}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right|_{-a}^a.$$

После подстановки пределов и алгебраических преобразований функция давления будет:

$$\sigma = \frac{p}{\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2n-1) \cdot a}{2\ell}}{\frac{\pi(2n-1)}{2\ell}} \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (13)$$

По известной функции давления (13) определяются перемещения точек массива, вызванные чистым формоизменением:

$$U^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \kappa^c \frac{p}{\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi(2n-1) a}{2\ell} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}; \quad (14)$$

$$W^c = -\kappa^c \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\kappa^c \frac{p}{\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell} \times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}}. \quad (15)$$

Перемещения точек упругой среды от изменения ее плотности после соответствующего интегрирования будут:

$$W^0 = -\kappa^0 \frac{p}{2\ell} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2n-1)a}{2\ell}}{\left[\frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \right]^2} \times \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right]. \quad (16)$$

Задача № 3. В задачах № 1 и 2 рассматривалось напряженно-деформированное состояние упругого массива прямоугольного поперечного сечения бесконечной длины для двух предельных случаев по граничным условиям на контакте его с основанием: контакт допускает только горизонтальные смещения от чистого деформирования (задача № 1) либо только вертикальные (задача № 2). Если же контакт с основанием допускает и горизонтальные и вертикальные смещения от чистого деформирования упругой среды, то задача может быть решена путем комбинирования двух решений. Для этого внешняя нагрузка делится на две части пропорционально оценочной величине упомянутых смещений:

$$P = P^r + P^b = m^r P + m^b P = P(m^r + m^b),$$

где m^r и m^b – коэффициенты, пропорциональные частям нагрузки, формирующим, соответственно, горизонтальные и вертикальные сдвиговые смещения на контакте. Их сумма равна единице.

Таким образом, общее решение будет состоять из суммы двух решений, пропорциональных решению задачи № 1 с коэффициентом

пропорциональности m^Γ и решению задачи № 2 с коэффициентом m^B .

Для нагрузки, сосредоточенной вдоль бесконечной линии, будем иметь: функция давления в любой точке поперечного сечения массива:

$$\sigma = \left[P \frac{m^\Gamma}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} + P \frac{m^B}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right],$$

а после преобразований

$$\sigma = \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \left[m^\Gamma \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot z}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} + m^B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}} \right]. \quad (17)$$

Перемещения, вызванные чистым формоизменением:

$$U^c = \kappa^c \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} \times \left[m^\Gamma \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot z}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} + m^B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right]; \quad (18)$$

$$W^c = -\kappa^c \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times \left[m^\Gamma \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot z}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} + m^B \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right]; \quad (19)$$

перемещения, вызванные изменением объема среды:

$$W^0 = -\kappa^0 \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ell}{\pi(2n-1)} \cdot \cos \frac{\pi(2n-1) \cdot x}{2\ell} \times$$

$$\times \left[m^\Gamma \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell} \cdot z}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}} + m^B \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n-1) \cdot z}{2\ell}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1) \cdot h}{2\ell}} \right]. \quad (20)$$

В том случае, когда на поверхности массива будет действовать равномерно распределенная нагрузка интенсивностью p (Н/м²) по бесконечной полосе шириной $2a$, решение задачи будет представлять комбинацию решений (5)–(8) и (13)–(16).

Задача № 4. Бесконечно простирающийся упругий массив ограниченной толщины на жестком основании (рис. 4). На его поверхности приложена по нормали сила P (Н/м), равномерно распределенная вдоль бесконечной линии, т.е. имеем задачу плоского деформирования. Условия контакта с жестким основанием допускают только горизонтальные смещения от чистого деформирования.

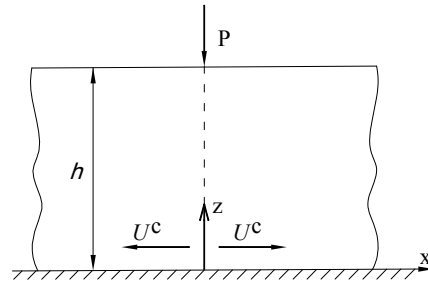


Рис. 4

Граничными условиями для функции давления в этом случае будут:

- 1) при $z=0$ $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ($W^c = 0$);
- 2) при $z=h$ и $x \neq 0$ $\sigma = 0$;
- 3) при $z=h$ и $x=0$ $\sigma = \infty$;
- 4) функция должна быть регулярной на бесконечности и четной относительно координаты x , т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma = 0$ и $\sigma(x, z) = \sigma(-x, z)$.

Для определения такой функции давления воспользуемся следующим приемом. В решении (1) для ограниченной ширины упругого массива будем увеличивать ее, устремив к бесконечности ($\ell \rightarrow \infty$). В пределе мы должны получить искомую функцию. При этом представим функцию (1) в следующем виде:

$$\sigma_{\text{орг}} = \frac{P}{2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z t_n}{\operatorname{ch} h t_n} \cdot \cos x t_n \cdot \Delta t_n,$$

$$\text{где } t_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}.$$

При неограниченном возрастании ширины массива $l \rightarrow \infty$ можно записать:

$$\sigma_{\text{неогр}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_{\text{огр}} = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } z \cdot t}{\text{ch } h \cdot t} \cdot \cos x \cdot t dt.$$

Согласно [5] несобственный интеграл такого вида равен:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ch } \beta x}{\text{ch } \gamma x} \cos \alpha x dx = \frac{\pi}{\gamma} \frac{\cos \frac{\pi \beta}{2\gamma} \cdot \text{ch } \frac{\pi \alpha}{2\gamma}}{\text{ch } \frac{\pi \alpha}{\gamma} + \cos \frac{\pi \beta}{\gamma}}.$$

Выполнив соответствующую подстановку, будем иметь:

$$\sigma = \frac{P}{h} \cdot \frac{\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\text{ch } \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}. \quad (21)$$

После алгебраических преобразований приводим (21) к более удобному виду:

$$\sigma = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\text{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}}, \quad (22)$$

или

$$\sigma = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\text{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} - \sin^2 \frac{\pi z}{2h}}. \quad (23)$$

Можно убедиться, что полученная функция давления удовлетворяет всем поставленным граничным условиям и является гармонической, т.е. обладает потенциалом. При этом отметим, что функция (22) была получена также А. Я. Мачеретом [6] при исследовании мгновенных напоров в грунтовой массе после приложения нагрузки.

Если предпосылки к получению функций давления (1) и (22) корректны, а сами функции определены верно, то путем предельного перехода $h \rightarrow \infty$ от функции (21) мы должны получить функцию давления для плоского деформирования полупространства. Выполним такой переход. Для этого, с целью упрощения выкладок, перенесем начало координат в рис. 4 на поверхность, в точку приложения силы, и попытаемся перейти к упомянутому пределу:

$$\sigma_{\text{неогр}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_{\text{огр}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P}{h} \frac{\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi(h-z)}{2h}}{\text{ch } \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi(h-z)}{h}} = \frac{0}{0}.$$

Для раскрытия неопределенности воспользуемся правилом Лопиталья:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P}{h} \cdot \frac{\text{sh } \frac{\pi x}{2h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{2h^2}\right) \cdot \cos \frac{\pi(h-z)}{2h}}{\text{sh } \frac{\pi x}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^2}\right) - \sin \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \frac{\pi z}{2h^2}} -$$

$$- \frac{\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \sin \frac{\pi(h-z)}{2h} \cdot \left(\frac{\pi z}{2h^2}\right)}{\text{sh } \frac{\pi x}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^2}\right) - \sin \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \frac{\pi z}{2h^2}} = \frac{0}{0}.$$

Неопределенность не раскрыта, поэтому воспользуемся второй раз правилом Лопиталья:

- производная числителя по h :

$$\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{2h^2}\right) \cdot \cos \frac{\pi(h-z)}{2h} + \text{sh } \frac{\pi x}{2h^2} \cdot \left(\frac{\pi x}{h^3}\right) \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(h-z)}{2h} - \text{sh } \frac{\pi x}{2h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{2h^2}\right) \cdot \sin \frac{\pi(h-z)}{2h} \times$$

$$\times \frac{\pi z}{2h^2} - \text{sh } \frac{\pi x}{2h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{2h^2}\right) \cdot \sin \frac{\pi(h-z)}{2h} \cdot \frac{\pi z}{2h^2} - \text{ch } \frac{\pi x}{2h} \times$$

$$\times \cos \frac{\pi(h-z)}{2h} \left(\frac{\pi z}{2h^2}\right)^2 - \text{ch } \frac{\pi x}{2h} \sin \frac{\pi(h-z)}{2h} \left(-\frac{\pi z}{h^3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{h^3} z;$$

- производная знаменателя по h :

$$\text{ch } \frac{\pi x}{2h} \left(\frac{\pi x}{h^2}\right)^2 + \text{ch } \frac{\pi x}{2h} \left(\frac{2\pi x}{h^3}\right) - \cos \frac{\pi(h-z)}{2h} \left(\frac{\pi z}{h^2}\right)^2 -$$

$$- \sin \frac{\pi(h-z)}{h} \left(-\frac{2\pi z}{h^3}\right) = \frac{\pi^2}{h^4} (x^2 + z^2).$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P}{h} \frac{\frac{\pi}{h^3} z}{\frac{\pi^2}{h^4} (x^2 + z^2)} = \frac{P}{\pi} \frac{z}{(x^2 + z^2)}. \quad (24)$$

Таким образом, мы получили функцию давления при плоском деформировании полупространства погонно-сосредоточенной силой [7] и

подтвердили взаимосвязь функций давления (1), (22) и (24).

Для определения компонентов напряженно-го состояния в рассматриваемой задаче № 4 воспользуемся условием [8]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - (h-z) \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\ \sigma_z &= \sigma - (h-z) \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\ \tau_{xz} &= (h-z) \frac{\partial \sigma}{\partial x}.\end{aligned}\quad (25)$$

После определения частных производных функции (22) и подстановки в (25) получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{2h} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} - \frac{\pi(h-z)}{2h} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cdot \sin \frac{\pi x}{2h} \left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} - \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]^2} \right];\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{P}{2h} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} + \frac{\pi(h-z)}{2h} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cdot \sin \frac{\pi z}{2h} \left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} - \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]^2} \right];\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= - \frac{P \cdot \pi \cdot (h-z)}{4h^2} \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi(h-z)}{2h} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} + \sin^2 \frac{\pi z}{2h} \right]}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]^2}.\end{aligned}\quad (28)$$

Для контроля соблюдения условия общего равновесия в задаче выполним следующую проверку: просуммируем вертикальное давле-

ние от массива на основание, которое должно быть равным внешней нагрузке P .

Приняв в (27) $z = 0$, имеем:

$$\sigma_z = \frac{P}{2h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h}}.$$

Проинтегрируем σ_z по контакту упругого массива с основанием:

$$\begin{aligned}2 \int_0^\infty \frac{P}{2h} \cdot \frac{dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h}} &= \frac{2P}{2h} \cdot \frac{2h}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{\pi x}{2h}\right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h}} = \\ &= \frac{2P}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left(\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2h} \right) \Big|_0^\infty = P.\end{aligned}$$

Следовательно, условие общего равновесия в задаче выполняется.

Компоненты смещений точек упругого массива от чистого формоизменения получаем согласно [3] в виде:

$$\begin{aligned}U^c &= -\kappa^c \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \\ &= \kappa^c \frac{P\pi}{4h^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} + \sin^2 \frac{\pi z}{2h} \right]}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]^2};\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}W^c &= -\kappa^c \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\kappa^c \frac{P\pi}{4h^2} \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cdot \sin \frac{\pi z}{2h} \left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} - \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right]^2}.\end{aligned}\quad (30)$$

Смещения точек упругого массива от изменения объема будут:

$$\begin{aligned}W^0 &= \kappa^0 \int_z^0 \sigma \cdot dz = \kappa^0 \frac{P}{h} \int_z^0 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} \cos \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2h} - \sin^2 \frac{\pi z}{2h}} = \\ &= -\kappa^0 \frac{P}{\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} + \sin \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} - \sin \frac{\pi z}{2h}} \right| \Big|_z^0;\end{aligned}$$

$$W^0 = \kappa^0 \frac{P}{\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} + \sin \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2h} - \sin \frac{\pi z}{2h}} \right|. \quad (31)$$

В том случае, когда на поверхности упругого массива будет действовать равномерно распределенная нагрузка интенсивностью p (Н/м²) по бесконечной полосе шириной $2a$, функция давления может быть определена путем интегрирования (22) соответственно рис. 5:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p}{2h} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x+\varepsilon)}{2h} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x+\varepsilon)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} d\varepsilon = \\ &= \frac{p}{2h} \frac{2h}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi z}{2h} \int_{-a}^a \frac{d \left[\operatorname{sh} \frac{\pi(x+\varepsilon)}{2h} \right]}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x+\varepsilon)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} = \\ &= \frac{p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x+\varepsilon)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} \Big|_{-a}^a; \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{p}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x+a)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x-a)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} \right]. \quad (32)$$

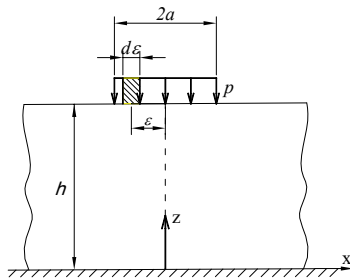


Рис. 5

Очевидно, что при бесконечном расширении загруженной полосы ($2a \rightarrow \infty$) давление в массиве будет стремиться к своему пределу, равному p (Н/м²), что и следует из (32).

Для определения компонентов напряжений и деформаций запишем частные производные функции давления (32):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{p}{2h} \left\{ \cos \frac{\pi z}{2h} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x+a)}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x+a)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} - \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(x-a)}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x-a)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} \right] \right\}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{p}{2h} \left\{ \cos \frac{\pi z}{2h} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x+a)}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x+a)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x-a)}{2h}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x-a)}{2h} + \cos^2 \frac{\pi z}{2h}} \right] \right\}. \quad (34)$$

Обозначив содержимое внешних скобок в (32, 33, 34) соответственно A_1, B_1, C_1 , компоненты напряженного состояния упругого массива будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} A_1 - (h-z) \frac{p}{2h} \cdot B_1; \\ \sigma_y &= \frac{p}{\pi} A_1 + (h-z) \frac{p}{2h} \cdot B_1; \\ \tau_{xy} &= (h-z) \cdot \frac{p}{2h} \cdot C_1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Компоненты смещений точек упругого массива от чистого формоизменения будут:

$$U^c = -\kappa^c \cdot \frac{p}{2h} \cdot B_1; \quad W^c = -\kappa^c \frac{p}{2h} \cdot C_1. \quad (36)$$

Вертикальные перемещения точек упругого массива от изменения его плотности могут быть определены путем интегрирования функции давления (32):

$$W^0 = \kappa^0 \frac{p}{\pi} \int \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x+a)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x-a)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} \right] dz$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(x-a)}{2h}}{\cos \frac{\pi z}{2h}} \Big] dz + C, \quad (37)$$

где C – произвольная интегрирования, которая определяется из граничных условий: $z = 0, W^0 = 0$.

Задача № 5. Эта задача отличается от задачи № 4 тем, что условия контакта упругого бесконечно простирающегося слоя ограниченной толщины с основанием допускают только вертикальные смещения от чистого формоизменения. При этом граничные условия для функции давления будут следующими:

1) при $z=0, \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$ ($U^c = 0$);

2) при $z=h$ и $x \neq 0$ $\sigma = 0$;

3) при $z=h$ и $x = 0$ $\sigma = \infty$;

4) функция должна быть четной относительно координаты x и регулярной на бесконечности.

Функция давления, удовлетворяющая этим условиям, может быть получена из решения (9) с ограниченной шириной массива, в котором выполним предельный переход $\ell \rightarrow \infty$. Предварительно запишем его в виде:

$$\sigma_{\text{орп}} = \frac{P}{2\ell} \cdot \frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{ch} t \cdot t_n}{\operatorname{ch} h \cdot t_n} \cdot \cos x t_n \cdot \Delta t_n,$$

где $t_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\ell}$.

При неограниченном возрастании ширины массива ℓ суммирование заменяем интегрированием:

$$\sigma = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sigma_{\text{орп}} = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z \cdot t}{\operatorname{ch} h \cdot t} \cdot \cos x \cdot t dt.$$

Согласно [5] несобственный интеграл такого вида сходится к своему пределу:

$$\int_0^{\infty} \cos \alpha x \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta \cdot x}{\operatorname{sh} \gamma \cdot x} dx = \frac{\pi}{2\gamma} \cdot \frac{\sin \frac{\pi \beta}{\gamma}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{\gamma} + \cos \frac{\pi \beta}{\gamma}}.$$

Выполнив соответствующую подстановку, получим функцию давления:

$$\sigma = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\sin \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}. \quad (38)$$

Для дальнейшего анализа решения и определения компонентов напряжений и деформаций запишем частные производные полученной функции давления (38):

- первые частные производные:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{p \cdot \pi^2}{2h^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi z}{h}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h} \right)^2};$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{p \cdot \pi^2}{2h^2} \cdot \frac{1 + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi z}{h}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h} \right)^2},$$

- вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = - \frac{p \cdot \pi^2}{2h^3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi z}{h} \left(1 - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{h} + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \cdot \cos \frac{\pi z}{h} \right)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h} \right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{p \cdot \pi^2}{2h^3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi z}{h} \left(1 - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{h} + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \cdot \cos \frac{\pi z}{h} \right)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h} \right)^3}.$$

Можно убедиться, что функция (38) удовлетворяет поставленным граничным условиям и является гармонической (сумма ее вторых частных производных равна нулю), следовательно она обладает потенциалом.

Подтверждением взаимной связи решений задач теории упругости является возможность предельного перехода от решения одной задачи к решению другой задачи. В связи с этим попробуем перейти от функции давления (38) в данной задаче к функции давления при плоском деформировании полупространства равномерно распределенной вдоль бесконечной линии нагрузкой P (Н/м). С целью удобства перенесем начало координат вертикально вверх на поверхность упругого бесконечно простирающегося слоя. В новой координатной системе функция (38) будет представлена в виде:

$$\sigma = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\sin \frac{\pi(h-z)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi(h-z)}{h}},$$

где координата z расположена в точке приложения нагрузки и направлена вниз, а область ее изменения будет: $h \geq z \geq 0$.

Для перехода к функции давления в полупространстве будем неограниченно увеличивать толщину упругого слоя $h \rightarrow \infty$:

$$\sigma = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P}{2h} \cdot \frac{\sin \frac{\pi(h-z)}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi(h-z)}{h}} = \frac{0}{0}.$$

Раскрытие неопределенности выполним по правилу Лопиталья. Для этого записываем первые производные по h в числителе и знаменателе:

$$\sigma = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P}{2h} \cdot \frac{\cos \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \frac{\pi x}{h^2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^2}\right) - \sin \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \left(\frac{\pi x}{h^2}\right)} = \frac{0}{0}.$$

Поскольку неопределенность не раскрыта, записываем вторые производные числителя и знаменателя:

- производная числителя:

$$-\sin \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \left(\frac{\pi x}{h^2}\right)^2 - \cos \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \left(\frac{2\pi x}{h^3}\right),$$

- производная знаменателя:

$$\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^2}\right)^2 + \operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^3}\right) -$$

$$-\cos \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \left(-\frac{\pi x}{h^2}\right)^2 + \sin \frac{\pi(h-z)}{h} \cdot \left(\frac{4\pi x}{h^3}\right),$$

а после перехода к пределу имеем

$$\sigma = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Таким образом, путем предельного перехода мы получили функцию давления при нагружении поверхности полупространства нагрузкой, равномерно распределенной вдоль бесконечной линии [7], что подтверждает взаимосвязь решений и является их контролем.

Компоненты напряженного состояния в данной задаче, в соответствии с условием (25), определяются зависимостями:

$$\sigma_x = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\sin \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}} - \frac{P\pi^2(h-z)}{2h^2}; \quad (39)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{2h} \cdot \frac{\sin \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}} + \frac{P\pi^2(h-z)}{2h^2} \times$$

$$\times \frac{\left(1 + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \cdot \cos \frac{\pi z}{h}\right)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}\right)^2}; \quad (40)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{P\pi^2(h-z)}{2h^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \cdot \sin \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}. \quad (41)$$

Компоненты перемещений точек массива от чистого формоизменения с учетом ранее предложенных зависимостей [3] будут:

$$U^c = \kappa^c \frac{P\pi^2}{2h^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \cdot \sin \frac{\pi z}{h}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}\right)^2};$$

$$W^c = -\kappa^c \frac{P\pi^2}{2h^2} \cdot \frac{\left(1 + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} \cdot \cos \frac{\pi z}{h}\right)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}\right)^2}. \quad (42)$$

Вертикальные перемещения точек массива от изменения его плотности определяются путем интегрирования (38):

$$W^0 = \kappa^0 \int \sigma \cdot dz + C = \kappa^0 \frac{P}{2h} \int \frac{\sin \frac{\pi z}{h} dz}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}} =$$

$$= -\kappa^0 \frac{P}{2\pi} \ln \left| \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h} \right| + C.$$

Здесь C – постоянная интегрирования, которая определяется из граничных условий: при $z = 0$ $W^0 = 0$, отсюда

$$C = \kappa^0 \frac{P}{2\pi} \ln \left| \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + 1 \right|,$$

и тогда

$$W^0 = -\kappa^0 \frac{P}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + 1} \right|. \quad (43)$$

В том случае, когда на поверхности бесконечно простирающегося упругого слоя ограниченной толщины в данной задаче будет действовать равномерно распределенная нагрузка p (Н/м²) по полосе бесконечной длины и постоянной ширины $2a$, задача определения функции давления решается путем интегрирования (38) согласно рис. 5:

$$\sigma = \frac{p}{2h} \int_{-a}^a \frac{\sin \frac{\pi z}{h} d\varepsilon}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x+\varepsilon)}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}.$$

После интегрирования и подстановки пределов получим:

$$\sigma = \frac{p}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi(x+a)}{2h} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2h} \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi(x-a)}{2h} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2h} \right) \right]. \quad (44)$$

Для определения компонентов напряжений и компонентов деформаций от чистого формоизменения запишем частные производные (44):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{p}{2h} \cdot \left[\frac{4 \operatorname{th}^3 \frac{\pi(x+a)}{2h} \cdot \operatorname{sech}^2 \frac{\pi(x+a)}{2h} \operatorname{tg}^4 \frac{\pi z}{2h}}{1 + \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x+a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\pi z}{2h}} + \frac{4 \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x-a)}{2h} \cdot \operatorname{sech}^2 \frac{\pi(x-a)}{2h} \operatorname{tg}^3 \frac{\pi z}{2h}}{1 + \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x-a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\pi z}{2h}} \right]; \quad (45)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{p}{2h} \cdot \left[\frac{4 \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x+a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\pi z}{2h} \operatorname{sec}^2 \frac{\pi z}{2h}}{1 + \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x+a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\pi z}{2h}} + \frac{4 \operatorname{th} \frac{\pi(x-a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\pi z}{2h} \cdot \operatorname{sec}^2 \frac{z}{2h}}{1 + \operatorname{th}^4 \frac{\pi(x-a)}{2h} \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{\pi z}{2h}} \right]. \quad (46)$$

Обозначив содержимое в квадратных скобках выражений (44, 45 и 46) соответственно A , B и D , запишем компоненты напряженного состояния:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{\pi} \cdot A - \frac{p}{2h} \cdot (h-z) \cdot B; \\ \sigma_z &= \frac{p}{\pi} \cdot A + \frac{p}{2h} \cdot (h-z) \cdot B; \\ \tau_{xz} &= \frac{p}{2h} \cdot (h-z) \cdot D, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

и компоненты смещений точек от чистого формоизменения:

$$\left. \begin{aligned} U^c &= -\kappa^c \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\kappa^c \frac{p}{2h} \cdot B; \\ W^c &= -\kappa^c \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\kappa^c \frac{p}{2h} \cdot D. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Перемещения от изменения плотности упругой среды могут быть определены интегрированием:

$$W^0 = \frac{p}{\pi} \int A \cdot dz + C, \quad (49)$$

где C – постоянная интегрирования, которая находится из граничных условий.

Задача № 6. В задачах № 4 и 5 были рассмотрены два предельные случаи граничных условий на контакте упругого массива с жестким основанием:

- контакт допускает только горизонтальные перемещения от чистого формоизменения;
- контакт допускает только вертикальные смещения от чистого формоизменения.

Если же условия на контакте могут допускать как горизонтальные, так и вертикальные смещения от чистого формоизменения, т.е. полные сдвиговые смещения будут направлены под некоторым углом к нему, то решение такой задачи может быть комбинацией решений задач № 4 и 5 подобно тому, как это было рассмотрено выше при решении задачи № 3.

Вывод

Подводя итог представленным выше решениям, отметим, что в обычной постановке, с применением обобщенного физического закона, решений этих задач не получено, использование же предлагаемых физических зависимостей приводит к расширению круга решаемых задач с одновременным более точным отражением самого явления деформирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бадалаха, И. К. Постановка и решение задач теории упругости с использованием потенциала [Текст] / И. К. Бадалаха // Дніпропетр. держ.

- техн. ун-т залізн. трансп : зб. наук. пр. «Будівництво». – 1999. – Вип. 6. – С. 173-184.
2. Бадалаха, И. К. Определение напряженно-деформированного состояния упругих массивов путем выделения объемных и сдвиговых деформаций [Текст] / И. К. Бадалаха // Ин-т геотехнической мех-ки НАН Украины : межвед. сб. науч. тр. – Вип. 18. – Д.: Поліграфіст, 2000. – С. 119-127.
 3. Бадалаха, И. К. Решение задач теории упругости с отдельным определением чистых и объемных деформаций [Текст] / И. К. Бадалаха // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2009. – Вип. 27. – Д.: Видво ДНУЗТ, 2009. – С. 154-159.
 4. Бадалаха, И. К. Влияние гидродинамических факторов на устойчивость оснований и сооружений из насыпных грунтов [Текст] : дисс. ... канд. техн. наук / И. К. Бадалаха. – Д., 1980. – 199 с.
 5. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
 6. Мачерет, Я. А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенной нагрузкой [Текст] / Я. А. Мачерет // Тр. ВИОС, сборник 4. – М., 1934. – 123 с.
 7. Бадалаха, И. К. Напряженно-деформированное состояние упругого полупространства от погонной линейной нагрузки, действующей на ограниченном и неограниченном протяжении его поверхности [Текст] / И. К. Бадалаха // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2009. – Вип. 26. – Д.: Видво ДНУЗТ, 2009. – С. 98-102.
 8. Флорин, В. А. Основы механики грунтов [Текст]. – т. I / В. А. Флорин // Л.-М.: Госиздво лит-ры по строит., арх-ре и строит. материалам, 1959. – 359 с.

Поступила в редколлегию 22.12.2009.
Принята к печати 28.12.2009.