УДК 539.3

В. Р. СКАЛЬСЬКИЙ, О. М. СТАНКЕВИЧ (Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАНУ, Львів)

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ НА ПОВЕРХНІ ПІВПРОСТОРУ, СПРИЧИНЕНИХ УТВОРЕННЯМ ВНУТРІШНЬОЇ ТРІЩИНИ СКРУТУ

Розглянуто динамічну задачу про визначення хвильового поля переміщень на поверхні пружного півпростору, спричиненого утворенням внутрішньої тріщини. Задача розв'язана методом граничних інтегральних рівнянь. Отримано та проаналізовано залежності між параметрами переміщень точок поверхні тіла та функціями розкриття поверхонь дефекту.

Рассмотрена динамическая задача определения волнового поля перемещений на поверхности упругого полупространства, обусловленного образованием внутренней трещины. Задача решена методом граничных интегральных уравнений. Получены и проанализированы зависимости между параметрами перемещений точек поверхности тела и функциями раскрытия поверхностей дефекта.

The dynamic problem on determination of the wave field of displacements on the surface of the elastic half-space caused by an inner crack nucleation is presented. The problem is solved using boundary integral equations. The relationships between the parameters of displacements of the body surface points and the functions of opening of the defect walls are derived and analyzed.

Технічне діагностування є важливою віхою моніторингу стану конструкцій, оскільки воно дає змогу не лише відслідковувати стадії зародження та розвитку пошкоджень у тілах, а й дозволяє прогнозувати їх залишковий ресурс і рекомендувати оптимальні режими експлуатації. Основу такого діагностування складає неруйнівний контроль, серед різноманіття способів якого варто виокремити метод акустичної емісії (АЕ) [1–3]. Він ґрунтується на явищі випромінювання пружних хвиль розривами суцільності середовища (дефекти структури типу тріщин, порожнин, тощо) як на етапах виникнення, так і подальшого їх розвитку та поширення. Використовуючи строгий математичний апарат, метод АЕ дозволяє ефективно відстежувати отримані сигнали та після відповідної їх обробки проводити вірогідну інтерпретацію щодо аналізу пошкодженості конструкцій.

Важливою запорукою успішного застосування такого підходу є створення відповідних математичних моделей, які адекватно описують явище утворення у навантаженому тілі структурних дефектів, досліджують ініційоване ними пружне поле переміщень, встановлюють залежності між характеристиками дефектів та параметрами АЕ [4].

Розглянемо тривимірну динамічну задачу теорії пружності про утворення у півпросторі з вільною поверхнею тріщини. Вибрана модель півбезмежного тіла добре описує поведінку реальних великогабаритних конструкцій на кшталт транспортних тунелів, фундаментів інженерних споруд тощо. Нехай пружний півпростір містить дискову тріщину радіуса a, яка займає область S_1, паралельну до поверхні S_0 тіла та розташовану на глибині d (рис. 1).

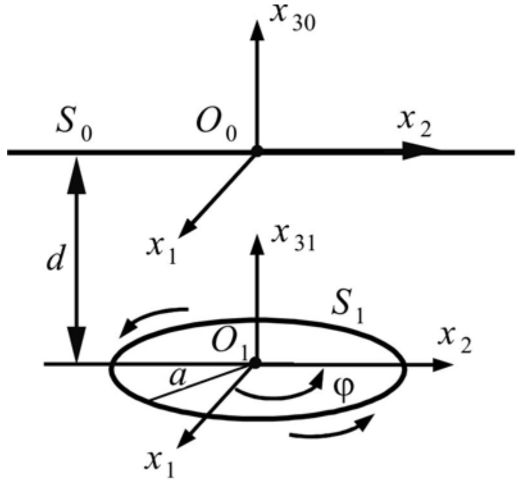

Рис. 1. Схема задачі

Декартову систему координат $O_1 x_1 x_2 x_{31}$ вибрано так, щоб область S_1 містилась в площині $x_1 O_1 x_2$. Утворення дефекту в часі t моделюємо заданням стрибків $\Delta u_{j1}(x,t)$, $j=\overline{1,3}$ протилежних поверхонь тріщини в напрямках $O_1 x_j$. Обмежимось випадком розкриття в тілі тріщини скруту з нерухомим контуром. Зародження такого типу дефекту може бути спричинене крутними навантаженнями, які виникають у фундаментах споруд при їх неоднаковій осадці від нерівномірного просідання ґрунту, підтоплення ґрунтовими водами тощо.

Поставлена задача зводиться до розв'язування диференціального рівняння руху відносно вектора $\mathbf{u}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ пружних переміщень

$$\Delta_3 \mathbf{u}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

з такими крайовими умовами:

$$\sigma_{j3}\left(x_0, t\right)=0 \;,\; j=\overline{1,3} \;,\; x_0\in S_0 \,;$$
$$\Delta u_{j1}\left(x,t\right)=\left(\delta_{1j}x_2-\delta_{2j}x_1\right)\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\; f\left(t\right)\,;$$
$$j=1,2 \;,\; \Delta u_{31}\left(x,t\right)=0 \;,\; x\in S_1 \,, \qquad (2)$$

де ν, ρ, G – відповідно коефіцієнт Пуассона, густина і модуль зсуву матеріалу тіла; $\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – тривимірний Лапласів оператор; δ_{ij} – Кронекерів символ; σ_{j3} – компоненти тензора напружень; $f\left(t\right)$ – функція розкриття в часі поверхонь тріщини. Початкові умови задачі вважаємо нульовими. Наявність кореневої особливості в (2) забезпечує відсутність стрибка переміщень в точках контуру тріщини [5].

Задачу розв'язували з використанням інтегрального перетворення Фур'є за часом. При цьому співвідношення (1), (2) набувають вигляду:

$$\Delta\tilde{\mathbf{u}}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}+\omega^2\frac{\rho}{G}\tilde{\mathbf{u}}=0\,; \qquad (3)$$
$$\tilde{\sigma}_{j3}\left(x_0,\omega\right)=0 \;,\; x_0\in S_0\,;$$
$$\Delta\tilde{u}_{j1}\left(x,\omega\right)=\left(\delta_{1j}x_2-\delta_{2j}x_1\right)\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\;\tilde{f}\left(\omega\right)\,;$$
$$\Delta\tilde{u}_{31}\left(x,\omega\right)=0 \;,\; x\in S_1\,, \qquad (4)$$

де $\omega\in\left(-\infty, +\infty\right)$ – параметр інтегрального перетворення; $\tilde{g}\left(\omega\right)$ – Фур'є-трансформанта функції $g\left(t\right)$. Розв'язок задачі (3), (4) додатково повинен задовольняти певним змішаним крайовим умовам. Зокрема, якщо поверхні тріщини навантажені лише нормальними зусиллями, то переміщення $u_3=0$ поза тріщиною в площині її розташування, а напруження $\sigma_{13}=0$, $\sigma_{23}=0$ у всій площині. Якщо ж поверхні тріщини зазнають дії зсувних зусиль, то $u_1=0$, $u_2=0$ поза тріщиною в площині її розташування, а напруження $\sigma_{33}=0$ у всій площині. Враховуючи вищесказане, розв'язок задачі (3), (4) вибрано у вигляді інтегральних представлень:

$$\tilde{u}_{j0}\left(x,\omega\right)=\frac{2}{\omega_2^2}\left[\frac{\omega_2^2}{2}\frac{\partial P_{j0}^2}{\partial x_{30}}+\left(\Delta_2+\frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial P_{30}^1}{\partial x_j}-\right.$$
$$\left.-\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)\frac{\partial P_{30}^2}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial P_{j1}^2}{\partial x_{310}} \;,\; j=1,2\,;$$
$$\tilde{u}_{30}\left(x,\omega\right)=\frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial}{\partial x_{30}}\left[\Delta_2\left(P_{30}^1-P_{30}^2\right)+\frac{\omega_2^2}{2}P_{30}^1\right] .(5)$$

В (5) наведені такі позначення:

$$P_{jk}^n\left(x_{k0},\omega\right)=\iint_{S_k}\Delta\tilde{u}_{jk}\left(\xi,\omega\right)\frac{\exp\left(i\omega_n\left|x_{k0}-\xi\right|\right)}{\left|x_{k0}-\xi\right|}dS_\xi\,,$$

$j=\overline{1,3}$, $k=0,1$, $n=1,2$ – Гельмгольцеві потенціали [5] ; $\omega_n=\omega/c_n$ – хвильове число; $c_1=\sqrt{2\left(1-\nu\right)/\left(1-2\nu\right)}\,c_2$ і $c_2=\sqrt{G/\rho}$ – швидкості поширення у тілі поздовжньої і поперечної об'ємних пружних хвиль;
$\left|x_0-\xi\right|=\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2}$;
$\left|x_{10}-\xi\right|=\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2+x_{310}^2}$, $x_{310}=d$;
$i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця; $\Delta\tilde{u}_{j0}$ – невідомі густини потенціалів, які характеризують переміщення точок поверхні S_0 півпростору та підлягають визначенню. Вибір розв'язків у вигляді (5) тотожно задовольняє рівняння (3) та умови Зоммерфельда випромінювання на безмежності. Розв'язки вибрані на підставі принципу суперпозиції, згідно якого переміщення в довільній точці тіла складаються з переміщень від розкриття тріщини та від переміщень точок поверхні півпростору.

Використавши співвідношення закону Гука, запишемо інтегральні представлення для напружень:

$$\tilde{\sigma}_{j3}\left(x_0,\omega\right)=\frac{4G}{\omega_2^2}\left[-B_j+\left(\Delta_2+\frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial^2\left(P_{30}^1-P_{30}^2\right)}{\partial x_j\,\partial x_{30}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_2^2}{4}\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)P_{j0}^2\right] ,\; j=1,2\;,$$

$$\tilde{\sigma}_{33}\left(x_0,\omega\right)=\frac{4G}{\omega_2^2}\left[-B_3-\left(\Delta_2+\frac{\omega_2^2}{2}\right)^2P_{30}^1+\right.$$

$$-\Delta_2\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)P_{30}^2\Big],\ j=1,2, \tag{6}$$

де $B_j=\dfrac{\omega_2^2}{4}\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)P_{j1}^2$, $j=1,2$, $B_3=0$.

Для визначення невідомих функцій $\Delta\tilde{u}_{j0}$ необхідно скористатися умовою (4) відсутності напружень на вільній поверхні S_0 тіла. Задовольняючи відповідну крайову умову, отримали систему 3-х двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу потенціалу Гельмгольца відносно густин $\Delta\tilde{u}_{j0}$:

$$\left(\Delta_2+\frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial^2\left(P_{30}^1-P_{30}^2\right)}{\partial x_j\,\partial x_{30}}-\frac{\omega_2^2}{4}\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)P_{j0}^2=B_j,$$

$$\left(\Delta_2+\frac{\omega_2^2}{2}\right)^2P_{30}^1+\Delta_2\left(\Delta_2+\omega_2^2\right)P_{30}^2=B_3.$$

$$j=1,2\ ,\ x_0\in S_0. \tag{7}$$

Застосувавши до (7) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_{10}, x_{20} та використавши теорему про згортку, отримали систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих $\Delta\tilde{u}_{j0}$. Розв'язавши систему рівнянь та застосувавши до її розв'язків обернене двовимірне перетворення Фур'є, отримали представлення густин $\Delta\tilde{u}_{j0}$, $j=\overline{1,3}$, через функції $\Delta\tilde{u}_{j1}(x,\omega)$ розкриття тріщини у виді:

$$\Delta\tilde{u}_{j0}=\frac{1}{\pi^2\omega_2^2}\iint\limits_{S_0}\int\limits_0^\infty\frac{\rho}{R_2(\rho)}J_0\left(\rho|\xi-\eta|\right)B_j\,d\rho\,dS_\eta,$$

де $R_2(\rho)=\sqrt{\rho^2-\omega_2^2}$; $J_0(z)$ – Бесселева функція нульового порядку дійсного аргументу z. Підставивши вирази $\Delta\tilde{u}_{j0}$ у співвідношення (5), використавши результати роботи [6] та властивість нормальної похідної від потенціалу

$$\frac{\partial P_{j0}^n}{\partial x_{30}}=2\pi\Delta\tilde{u}_{j0}\ ,\ x_{30}\to-0\ ,\ j=\overline{1,3},$$

отримали такі інтегральні представлення для переміщень на поверхні півпростору:

$$\tilde{u}_{j0}\left(x_0,\omega\right)=\frac{\partial P_{j1}^2}{\partial x_{310}}-\iint\limits_{S_1}\Delta\tilde{u}_{jk}(\xi,\omega)\Omega\left(x_{10},\xi\right)dS_\xi,$$

$$j=1,2\ ,\ \tilde{u}_{30}\left(x_0,\omega\right)=0. \tag{8}$$

Де

$$\Omega\left(x_{10},\xi\right)=\int\limits_0^\infty\rho\exp\left(-x_{310}R_2(\rho)\right)J_0\left(\rho|x_0-\xi|\right)d\rho\ .$$

Перший доданок у (8) характеризує переміщення у безмежному тілі від розкриття тріщини, а другий доданок характеризує вплив вільної поверхні тіла. Виконаємо тотожні перетворення

$$\Omega\left(x_{10},\xi\right)=\int\limits_0^\infty\rho\exp\left(-x_{310}R_2(\rho)\right)J_0\left(\rho|x_0-\xi|\right)d\rho=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_{310}}\int\limits_0^\infty\rho\frac{\exp\left(-x_{310}R_2(\rho)\right)}{R_2(\rho)}J_0\left(\rho|x_0-\xi|\right)d\rho=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_{310}}\frac{\exp\left(i\omega_2|x_{10}-\xi|\right)}{|x_{10}-\xi|}.$$

На підставі вищесказаного вирази (8) набувають вигляду:

$$\tilde{u}_{j0}\left(x_0,\omega\right)=2\frac{\partial P_{j1}^2}{\partial x_{310}}=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x_{310}}\iint\limits_{S_1}\Delta\tilde{u}_{j1}(\xi,\omega)\frac{\exp\left(i\omega_2|x_{10}-\xi|\right)}{|x_{10}-\xi|}dS_\xi,$$

$$j=1,2\ ,\ \tilde{u}_{30}\left(x_0,\omega\right)=0. \tag{9}$$

Вирази (9) дозволяють зробити наступні висновки:

1. При розглянутому утворенні тріщини кручення в тілі поширюються лише горизонтально поляризовані (SH) поперечні хвилі зі швидкістю c_2.

2. Вертикальні переміщення точок поверхні півпростору відсутні.

3. Наявність вільної поверхні півпростору призводить до того, що амплітуди зсувних переміщень на ній удвічі перевищують свої аналоги для випадку безмежного тіла.

Застосувавши до (9) обернене перетворення Фур'є за часом та скориставшись при цьому співвідношенням запізнення

$$\tilde{f}(c\omega)\exp(ib\omega)\Rightarrow\frac{1}{c}f_F\left(\frac{t-b}{c}\right),$$

отримаємо:

$$u_{j0}\left(x_0,t\right)=2\frac{\partial}{\partial x_{310}}\iint\limits_{S_t}\frac{\Delta u_{j1}\left(\xi,t-\tau|x_{10}-\xi|\right)}{|x_{10}-\xi|}dS_\xi,$$

$$\Delta u_{j1}\left(\xi, t-\tau\left|x_{10}-\xi\right|\right)=\left(\delta_{1j}\xi_2-\delta_{2j}\xi_1\right)\times$$
$$\times\sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\, f\left(t-\tau\left|x_{10}-\xi\right|\right) \;,\; j=1,2\,. \quad (10)$$

Тут $\tau=a/c_2$ – характерний час, за який поперечна хвиля проходить відстань, рівну радіусу тріщини; S_t – частина області S_1, для якої $t-\tau\left|x_{10}-\xi\right|>0$.

Таким чином, отримано розв'язки у вигляді запізнюючого потенціалу (10) для переміщень на поверхні півпростору через відомі функції розкриття тріщини. При цьому автоматично задовольняються умови причинності – до приходу в точку спостереження пружної хвилі переміщення відсутні. Як приклад, розглядали випадок, коли функція $f(t)$ описується часовою залежністю [4]

$$f(t)=\begin{cases}1-\exp(-t/\tau), & t>0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Визначали залежності переміщення $u_\varphi^*= =u_{10}/a\sin\varphi=-u_{20}/a\cos\varphi$ від безрозмірного часу $t_*=t/\tau$ (рис. 2) в точці поверхні півпростору, розташованій на відстані $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=10a$. Глибина залягання тріщини становить $d=a$.

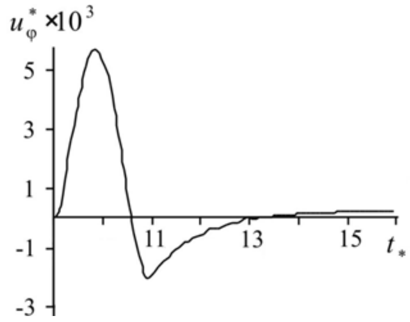

Рис. 2. Залежність переміщень від часу

Видно, що з приходом в точку спостереження пружних хвиль амплітудні значення переміщень спочатку зростають, а потім – спадають. Найбільшого від'ємного значення переміщення досягають в момент приходу в точку спостереження пружної хвилі від найбільш віддаленої точки контуру дефекту. З плином часу переміщення на поверхні тіла заникають.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Скальський, В. Р. Акустична емісія під час руйнування матеріалів, виробів і конструкцій. Методологічні аспекти відбору та обробки інформації [Текст] / В. Р. Скальський, П. М. Коваль. – Львів: СПОЛОМ, 2005. – 394 с.
2. Андрейків, О. Є. Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування [Текст] / О. Є. Андрейків, В. Р. Сокальський, Г. Т. Сулим. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 480 с.
3. Grosse Ch. U. Acoustic emission testing. Basics for research – application in civil engineering [Текст] / Ch. U. Christian, Masayasu Ohtsu. – Springer-Verlag, 2008. – 404 p.
4. Назарчук, З. Т. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій [Текст]: наук.-техн. посіб. у 3 т. – Т. 1. Теоретичні основи методу акустичної емісії / З. Т. Назарчук, В. Р. Сокальський. – К.: Наук. думка, 2009. – 287 с.
5. Кит, Г. С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. В. Хай. – К.: Наук. думка, 1989. – 288 с.
6. Станкевич, В. З. Обчислення деяких двовимірних інтегралів, характерних для динамічних задач теорії тріщин в півбезмежному тілі [Текст] / В. З. Станкевич // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 39. – С. 56-61.

Надійшла до редколегії 17.03.2010.
Прийнята до друку 26.03.2010.