

Я. М. ПАСТЕРНАК (Луцький національний технічний університет),
Г. Т. СУЛИМ (Львівський національний університет ім. І. Франка),
Й. Й. ЛУЧКО (Львівська філія ДПТУ)

МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТОНКИХ АРМУВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІДЗЕМНИХ СПОРУД ТА ТУНЕЛІВ

Побудовано модель тонкого армування, що враховує розтяг, зсув та згин останнього. Розроблену модель використано в методі інтегральних рівнянь при дослідженні концентрації напружень у стінці частково зміцненого тунелю. Отримано числові результати для різних значень довжини армування та його відносної жорсткості. Здійснено їх аналіз.

Построена модель тонкого армирования, которая учитывает растяжение, сдвиг и изгиб последнего. Разработанная модель использована в методе интегральных уравнений при исследовании концентрации напряжений в стенке частично подкрепленного туннеля. Получены численные результаты для различных значений длины армирования и его относительной жесткости. Произведен их анализ.

In this paper the model of thin reinforcement that takes into account its tension, shear and bending is developed. The model developed is introduced into the integral equation method for study of stress concentration in the wall of partially reinforced tunnel. The numerical results are obtained and analyzed for different values of reinforcement length and relative rigidity.

Вступ

Задачі геомеханіки та інженерної геології настільки складні і багатофакторні, що їх повного формулювання, яке б адекватно відобразило повну картину явища, годі й чекати. Однак, як зазначено у роботі [1], моделювання таких задач навіть в межах фізично й геометрично лінійної теорії пружності дає можливість зрозуміти найважливіші властивості поставленої інженерної проблеми. Зокрема, під час проектування підземних споруд, якими є, скажімо, тунелі, необхідними є методи моделювання природних та конструкційних факторів, що обумовлюють напружений стан елементів споруди. Важливим при цьому є врахування впливу на напружений стан тонких армувальних складових, що сприяє оптимізації проекту та зменшує витрати на будівництво.

На цей час склалися два основні підходи дослідження тіл із тонкими елементами: прямий [2, 3], у якому останні вважають об'єктом із певною товщиною, та спеціальний [4 – 6], де на основі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності [7] тонкий елемент заступають розрізом уздовж його серединної поверхні із заданими на ньому певними крайовими умовами взаємодії неоднорідності з матеріалом середовища.

Для дослідження напруженого стану тіл складної форми із тонкими криволінійними армувальними елементами видається ефективним

поєднання прямих числових методів зі спеціальними підходами. Зокрема у роботі [1] для вивчення заповнених тріщин використано модель типу пружної основи Вінклера. Подібна модель введена в схему методу скінчених елементів у роботі [4] для визначення напруженого стану тіл із тонкими включеннями. Ці моделі дають можливість описувати тонкі неоднорідності з податного матеріалу, які є заповненнями, однак не можуть вважатися підкріпленнями.

Для опису армувальних елементів конструкції обов'язково необхідно враховувати їх опір поздовжньому розтягу та поперечному згину. Для тонких пружних елементів довільної жорсткості відповідний підхід [8] розроблено на основі методу інтегральних рівнянь. У цьому дослідженні розвинуто практичну реалізацію лінійчатої моделі [8] на підставі врахування опору тонкого елемента згину та обґрунтовано можливість її використання до моделювання армувальних елементів підземних споруд.

1. Формулювання задачі

У задачах інженерної геомеханіки, пов'язаних із підземними будівлями, необхідно перш за все постулювати початковий напружений стан масиву гірських порід [1]. Відповідно до підходу [1], повні напруження у довільній точці масиву можна подати як суму початкових напружень σ_{ij}^0 та зміни напружень σ'_{ij} в цій точці.

Аналогічні співвідношення записуються для переміщень: $u_i = u_i^0 + u_i'$. Як правило, початкові переміщення вважають рівними нулю, і тоді повні переміщення та додаткові переміщення збігаються.

При постановці крайових задач в додаткових напруженнях використовують як вектор заданих навантажень t_i , так і вектор початкових напружень t_i^0 . Додаткові напруження, що необхідно прикласти до межі, таким чином, дорівнюють $t_i' = t_i - t_i^0$.

Якщо початкові напруження σ_{ij}^0 є однорідними, або близькими до таких, то задачу можна звести до розгляду середовища із заданим на безмежності однорідним навантаженням $\sigma_{ij}^\infty = \sigma_{ij}^0$. Надалі будемо аналізувати лише цей найпростіший випадок. Розгляд загального випадку за відомого поля залишкових напружень не вносить принципових складностей у схему розв'язування задачі.

Розглянемо задачу про тунелі в однорідному пружному масиві за висунутих вище припущень. Вважатимемо, що матеріал внутрішньої обробки тунелю близький за своїми властивостями із матеріалом масиву. Для зміцнення між матеріалом обробки та власне породою вводяться тонкі армувальні елементи. Така задача зводиться до плоскої деформації середовища з отворами, близько до яких розташовані тонкі криволінійні включення (армування).

2. Інтегральні рівняння задачі

Створюючи лінійчатую модель підкріплення, вилучимо із розгляду армувальний елемент як геометричний об'єкт, а контактні напруження та переміщення перенесемо на його серединну поверхню Γ_C (відповідно на береги Γ_C^+ та Γ_C^- , рис. 1). Переміщення у тілі з розрізом визначаються з такої тотожності Сомільяни [6, 9]:

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) = u_i^{\text{hom}}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де u_i , t_i – компоненти векторів переміщень та напружень; u_i^{hom} – переміщення, що відповідають однорідному полю напружень σ_{ij}^∞ ;

$\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$, $\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$, $\Sigma u_i = u_i^+ + u_i^-$, $\Sigma t_i = t_i^+ + t_i^-$; n_j^+ – компоненти вектора нормалі

до поверхні Γ_C^+ ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених розрізом Γ_C (див. рис. 1). Індеси у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності записані, зокрема в [1].

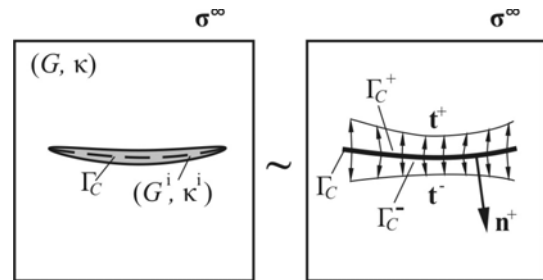


Рис. 1. Схема моделювання тонкого армування

Спрямовуючи внутрішню точку $\boldsymbol{\xi}$ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma_C$ розрізу Γ_C та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ_C є гладкою, аналогічно до [9] із (1) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно переміщень:

$$\frac{1}{2} \Sigma u_i(\mathbf{y}) = u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y}) + \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (2)$$

де позначення RPV означає величину невластного інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value). При числовому моделюванні ламаних розрізів чи включень інтегральне рівняння (2) можна використовувати, забезпечивши в обчислювальній схемі умову, що точка колокації \mathbf{y} не потрапляє у точку зламу. Диференціюючи (2) за y_k , використовуючи закон Гука та враховуючи, що $n_i^+ = -n_i^-$, отримаємо

$$\frac{1}{2} \Delta t_i(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[\sigma_{ij}^\infty(\mathbf{y}) + \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \quad (3)$$

де HPV – скінчена частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value).

Отвори в масиві моделюватимемо замкненими розрізами із заданим на них розривом вектора напружень за врахування умови $u_i^+ \equiv 0$ для довільної точки межі отвору.

Модель тонкого армування повинна включати чотири лінійно незалежні рівняння типу

$$F_k(\Delta t_i, \Sigma t_i, \Delta u_i, \Sigma u_i) = 0 \quad (k=1, \dots, 4). \quad (4)$$

Тоді система рівнянь (2)–(4) є повною.

Припустимо, що модель тонкого армування (4) дає можливість знайти з її рівнянь величини Σu_i та Δt_i у явній формі:

$$\begin{aligned} \Sigma u_i &= F_i^u(\Sigma t_j, \Delta u_j), \\ \Delta t_i &= F_i^t(\Sigma t_j, \Delta u_j). \end{aligned} \quad (i, j=1, \dots, 2) \quad (5)$$

Тоді система рівнянь (2)–(4) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & = \frac{F_i^u(\Sigma t_j, \Delta u_j)}{2 - u_i^{\text{hom}}(\mathbf{y})}, \\ & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ & \left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ & = \frac{F_i^t(\Sigma t_j, \Delta u_j)}{2 - n_j^+(\mathbf{y}) \sigma_{ij}^\infty(\mathbf{y})}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Таким чином, поставлена задача зведеться до знаходження із системи інтегральних рівнянь (6) невідомих стрибків переміщень Δu_j та напружень $\Delta \sigma_{j\tau} = \Sigma t_j$.

Систему крайових інтегральних рівнянь (6) розв'язуватимемо методом граничних елементів [9] із використанням лінійчатих розривних квадратичних елементів.

3. Модель тонкого пружного включення (армування)

Використаємо розроблену авторами модель тонкого пружного включення [8], у якій для k -го граничного елемента тонкого включення маємо такі зв'язки між крайовими функціями:

$$\begin{aligned} \Delta t_i^k &= -\alpha_{pi} \alpha_{qj} A_{pq} \Delta u_j^k; \\ \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\xi) &= u_i^0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{pi}^s \alpha_{qj}^s B_{pq} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\zeta) d\zeta d\eta + \\ & + \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^1 \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \alpha_{pi}^m \alpha_{qj}^m B_{pq} \left(P_j^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right) + \\ & + (\xi + 1) J_k \alpha_{pi}^k \alpha_{qj}^k B_{pq} \left(P_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де компоненти тензора повороту \mathbf{a} дорівнюють $\alpha_{11} = n_1$, $\alpha_{12} = n_2$, $\alpha_{21} = -n_2$, $\alpha_{22} = n_1$, а компоненти тензорів \mathbf{A} та \mathbf{B} означені так:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E^i}{h}; \quad A_{22} = \frac{G^i}{h}; \quad A_{12} = A_{21} = 0; \quad B_{11} = \frac{1}{[2hG^i]}; \\ B_{22} &= \frac{1}{[2hE^i]}; \quad B_{12} = B_{21} = 0; \quad E = \frac{G(7-k)}{2}; \end{aligned}$$

J_k – якобіан заміни змінних на k -тому граничному елементі; $P_j^0 = 2h\sigma_j^0$ – зусилля на лівому торці включення; k – стала Мусхелішвілі. Тут h – півтовщина включення, а верхнім індексом « i » позначено величини, що стосуються включення.

Додатково врахуємо у цій моделі особливо важливий для викривлених неоднорідностей згин тонкого включення. Для цього розглянемо рівновагу k -го граничного елемента включення щодо згинальних моментів. Відповідно до рис. 2, момент $M^k(\xi)$ у довільному перерізі ξ граничного елемента k включення дорівнює

$$\begin{aligned} M^k(\xi) &= -M^k(-1) - Q_n^k J_k(\xi + 1) + \\ & + J_k^2 n_j \int_{-1}^{\xi} \Sigma t_j^k(\eta) (\xi - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

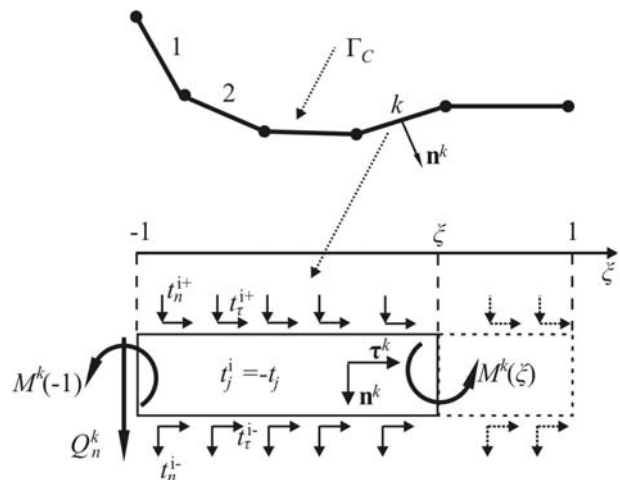


Рис. 2. Схема для запису рівнянь рівноваги моментів

Значення моменту $M^k(-1)$ на лівому торці граничного елемента k визначаються за навантаженням, прикладеним до елементів $1, (k-1)$:

$$M^k(-1) = M_0(\mathbf{x}_k) - \sum_{s=1}^{k-1} J_s^2 \left(C_j^s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi - n_j^s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) \xi d\xi \right), \quad (9)$$

де $C_1^s = -[x_2^s(0) - x_2^k(-1)]/J_s$;
 $C_2^s = [x_1^s(0) - x_1^k(-1)]/J_s$; $M_0(\mathbf{x}_k)$ – момент сил, зумовлений торцьовими зусиллями P_j^0 та моментом M_0 на лівому торці включення.

Подібно обчислюємо значення перерізувальної сили Q_n^k на лівому торці граничного елемента k включення:

$$Q_n^k = -n_j^k \left(P_j^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t_j^s(\xi) d\xi \right). \quad (10)$$

Відповідно до [10], малий поворот $\omega = \frac{\partial u_n}{\partial x_\tau}$

(вибрано додатний напрям за стрілкою годинника) осі тонкого стрижня пов'язаний зі згинальним моментом співвідношенням Ейлера-Бернуллі

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\tau} = -\frac{M(x_\tau)}{D}, \quad (11)$$

де $D = \frac{16G^i h^3}{3(k^i + 1)}$ – згинальна жорсткість. Інтегруючи (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega^k(\xi) &= \omega^k(-1) - \frac{J_k}{D} \int_{-1}^{\xi} M^k(\xi) d\xi, \\ \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\xi) &= \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(-1) + \\ &+ n_i^k \omega^k(-1) J_k(\xi+1) - \\ &- \frac{n_i^k J_k^2}{D} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Умова нерозривності осі включення, записана у вигляді

$$\omega^{k-1}(1) = \omega^k(-1); \quad \Sigma u_i^{k-1}(1) = \Sigma u_i^k(-1), \quad (13)$$

дає можливість виконати в (12) рекурсивну підстановку і знайти середнє значення переміщень включення у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\xi) &= u_i^0 + \\ &+ \omega^0 \left[\sum_{s=1}^{k-1} 2J_s n_i^s + J_k n_i^k(\xi+1) \right] - \\ &- \frac{2}{D} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{s-1} J_s J_m n_i^s \int_{-1}^1 M^m(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{k-1} n_i^s J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} M^s(\zeta) d\zeta d\eta - \\ &- \frac{n_i^k J_k^2}{D} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} M^k(\zeta) d\zeta d\eta - \\ &- \frac{(\xi+1)}{D} J_k n_i^k \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 M^s(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Об'єднуючи модель розтягу-стиску-зсуву (7) із моделлю згину (14) з урахуванням позначень (5), отримаємо рівняння математичної моделі тонкого пружного включення, придатні до впровадження у систему рівнянь (11).

Середні значення переміщень u_i^0 та повороту ω^0 лівого торця включення визначимо з рівнянь глобальної рівноваги включення:

$$\begin{aligned} 2h(\sigma_j^n - \sigma_j^0) - \int_{\Gamma_c} \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= 0; \\ M^n(1) + M_n &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Система рівнянь (6), (7) і (14) разом із рівнянням глобальної рівноваги включення (15) є повною для сформульованої задачі.

4. Числовий аналіз

Використаємо розроблену модель тонкого включення для дослідження напруженого стану масиву поблизу тунелю за армування останнього розімкненим пружним підкріпленням. Схему конкретної задачі зображено на рис. 3.

За основний розмір прийемо радіус тунелю R . Для числового аналізу виберемо такі значення параметрів задачі: $R_1 = 1,1R$, півтовщина армування $h = 0,01R$. Пружні властивості арматури характеризуватимемо її відносною жорсткістю $k = \frac{G^i}{G}$. Сталі Мусхелішвілі для матеріалів масиву та арматури вважатимемо однаковими і рівними 1,8 (відповідно, коефіцієнти Пуассона дорівнюють 0,3).

Кругові діаграми значень безрозмірних кильцевих напружень $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma}$, еквівалентних у даному випадку коефіцієнту інтенсивності напружень на контурі тунелю, залежно від кута θ

для окремих значень логарифма відносної жорсткості $\lg k = [0; 1; \dots; 5]$ арматури зображено на рис. 4 ($a - \alpha = 135^\circ$; $b - \alpha = 150^\circ$; $в - \alpha = 175^\circ$). Додатними вважатимемо напруження стиску.

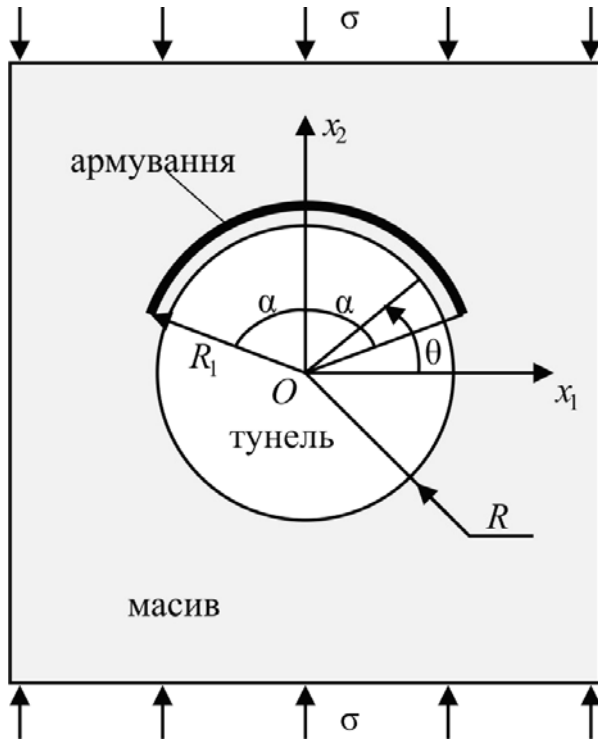


Рис. 3. Схема задачі для числового аналізу

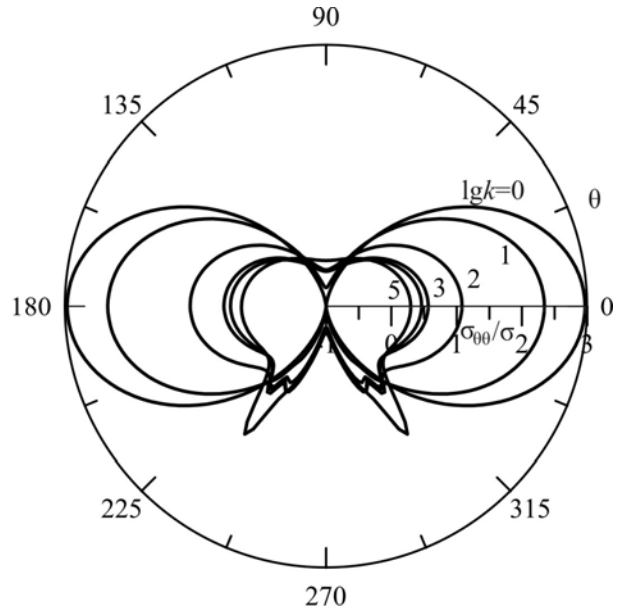


Рис. 4, б

Однорідний випадок, коли пружні властивості підкріплення ідентичні властивостям основного матеріалу (на рис. 4 лінії з позначкою « $\lg k = 0$ »), добре узгоджується з відомим розв'язком Кірша [10]. Із рис. 4 видно, що для зменшення концентрації напружень до значень, близьких до 1, необхідно вибирати армувальні елементи, жорсткість яких приблизно на два порядки більша за жорсткість масиву (за вибраної для розрахунків відносної товщини армування h).

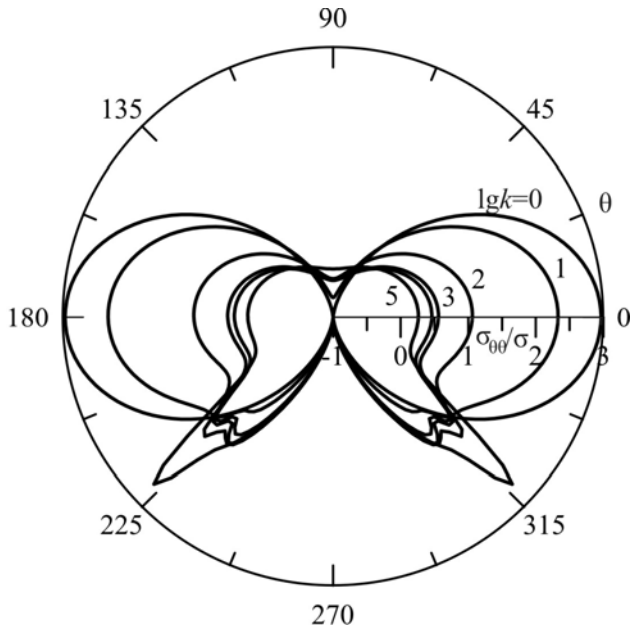


Рис. 4, а

Подальше збільшення жорсткості армування малоефективне, оскільки воно вже значно менше впливає на зміну значень концентрації напружень σ_{00} .

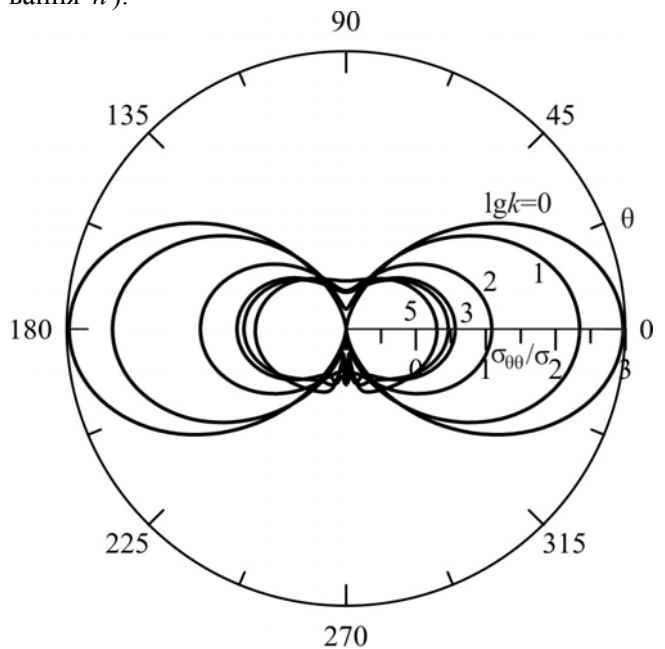


Рис. 4, в

Розімкненість армування чинить істотний вплив на збільшення концентрації напружень в околі кінців останнього. Однак зі збільшенням кута розхилу армування α цей вплив поступо-

во зменшується і, зокрема для $\alpha = 175^\circ$ вже практично не помітний. Зрозуміло також, що хоча розімкнуті підкріплення і зменшують концентрацію напружень на вільній поверхні, у цьому випадку слід зважати на можливість зародження і розвитку руйнування у безпосередній близькості до їхніх країв. Цю проблему можна вирішити на основі результатів застосування методів механіки руйнування [6].

Висновки

На основі класичної теорії згину модель тонкого викривленого включення доповнено додатковими складовими, що враховують його опір згину. Цю модель адаптовано до використання в методі граничних інтегральних рівнянь. За допомогою розробленої числової схеми розглянуто задачу про визначення концентрації напружень в частково підкріпленій тонким елементом стінці тунелю. Отримані числові результати свідчать, що найбільший ефект дає близьке до замкнутого підкріплення, відносна жорсткість якого на 2 порядки більша за відносну жорсткість матеріалу масиву.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела [Текст] / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
2. Сулим, Г. Регуляризована тотожність Соміляни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами [Текст] / Г. Сулим, Я. Пастернак // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. «Прикладна математика та інформатика». – Вип. 13. – 2007. – С. 142-150.
3. Опанасович, В. К. О двух подходах к исследованию антиплоской деформации изотропного массива с тонким упругим включением [Текст] / В. К. Опанасович // Прикл. математика и механика. – 1988. – Вып. 1. – С. 116-119.
4. Винницька, Л. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням [Текст] / Л. Винницька, Я. Савула // Фіз.-мат. моделювання та інф. технології. – 2008. – № 7. – С. 21-29.
5. Підстригач, Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл [Текст] / Я. С. Підстригач // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872-874.
6. Сулим, Г. Т. Основи математичної теорії термopужної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г. Т. Сулим. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
7. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
8. Пастернак, Я. М. Дуальний метод граничних елементів у задачах теорії тонких включень [Текст] / Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим // Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування. Праці конференції. – Тернопіль, 2009. – С. 137-143.
9. Portela, A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems [Text] / A. Portela, M. H. Aliabadi, D. P. Rooke // Int. J. Numer. Meth. Engineering. – 1992. – 33. – P. 1269-1287.
10. Тимошенко, С. П. Курс теорії упругості [Текст] / С. П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.

Надійшла до редколегії 22.02.2010.

Прийнята до друку 01.03.2010.