УДК 624.012

Й. Й. ЛУЧКО (Львівська філія ДІТу), М. І. ІГНАТИШИН (Мукачівський державний університет)

ЧИСЛОВІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

У статті розглянуто числові та аналітичні методи розрахунку напружено-деформованого стану мостових конструкцій. Сформульовано постановку задачі підвищення надійності та точності числового метода та спосіб її вирішення шляхом проведення розрахунків у двох базисах. Отримано аналітичний розв'язок диференціального рівняння деформації залізобетонної плити, що знаходиться під дією системи локальних навантажень.

В статье рассмотрены числовые и аналитические методы расчета напряженно-деформированного состояния мостовых конструкций. Сформулированы постановка задачи повышения надежности и точности числового метода и способ ее решения путем проведения расчетов в двух базисах. Получено аналитическое решение дифференциального уравнения деформации железобетонной плиты, которая находится под действием системы локальных нагрузок.

In this article the numerical and analytical methods of calculation of the stressed-and-strained state of bridge constructions are considered. The task on increasing of reliability and accuracy of the numerical method and its solution by means of calculations in two bases are formulated. The analytical solution of the differential equation of deformation of a ferro-concrete plate under the action of local loads is also obtained.

Постановка проблеми

В свій час щорічно в Радянському Союзі будувалось декілька сотень мостів та багато тисяч малих штучних споруд на дорогах. Зараз в Україні налічується тисячі мостів з яких значна частина потребує ремонту та реконструкції. Актуальною є проблема проведення проектних робіт по ремонту, реконструкції автомобільних і залізничних мостів, зокрема, проведення розрахунку та моделювання деформацій і навантажень, які виникають в різних частинах моста. Проблема ця комплексна. Вона включає наукову, технічну та фахову складову. Для проведення значної та нестандартної кількості проектних робіт необхідні наукові розробки. Наукові розробки, в свою чергу, необхідно трансформувати в технічні засоби одним з яких є програмний продукт для проектування. Для здійснення наукових розробок та їх трансформації в технічні засоби необхідно підготувати відповідних фахівців.

Аналіз останніх публікацій з розглядуваної проблеми. Не дивлячись на доволі високий розвиток науки про розрахунок напружено-деформованого стану [1–3], [19], в минулому столітті, навіть, в розвинутій країні США в прірву зірвалася сотня мостів. Не кращай стан і в цьому столітті. Серед катастроф мостів є такі, що зруйнувалися внаслідок помилкових розрахунків.

Широкого застосування набули метод скінчених елементів, що виник в 60-х роках минулого століття [5, 8, 16, 17], варіаційні методи [6, 14, 15], методи функціонального аналізу [4, 9, 10].

Постановка завдання

Із всього різноманіття згаданих вище проблем зупинимось на тій, яка є першою ланкою в ланцюзі, що приводить до утворення споруди, − моста. Цією першою ланкою є етап математичного моделювання елементів мостових конструкцій та процедура отримання розв'язку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо моделі, що описують деформацію основних елементів мостових конструкцій: опора, балка, плита. Їх можна записати в так званій операторній формі:

$$\hat{A}u = q\,, \qquad (1)$$

де $\hat{A}$ − оператор, що є математичною моделлю конструктивного елемента моста; q − функція залежності навантаження від координат, u − функція залежності деформації від координат.

Функція u на краях може дорівнювати нулю або задовольняти крайовим умовам в операторній формі:

© Лучко Й. Й., Ігнатишин М. І., 2010

$$\hat{K}_i u = h_i . \qquad (2)$$

Вигляд операторів $\hat{K}_i$ визначається способом закріплення відповідного елемента конструкції моста.

Співвідношення (1) та (2) утворюють крайову задачу.

Методи розв'язку крайових задач можна умовно розділити на дві групи: чисельні й аналітичні.

Далеко не всі задачі можуть бути вирішені аналітичними методами, а чисельні методи дають принципово наближений результат.

Аналіз наукових джерел свідчить, що перевага надається чисельним методам, причому в певній системі базисних функцій. Відсутні роботи з порівняння чисельних розв'язків в різних базисних функціях з аналітичними розв'язками, а також порівняння чисельних розв'язків в різних базисах. Таке порівняння може бути використано як критерій необхідної степені дискретизації представлення числового розв'язку.

Числові методи

Наближений розв'язок $\tilde{u}$ як відрізок ряду має вигляд:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}^i e_i , \qquad (3)$$

де при заданому базисі e_i набір чисел $\left\{\tilde{u}^i\right\}$ однозначно визначає $\tilde{u}$.

На рис. 1 умовно зображено точний розв'язок у нескінченновимірному просторі вектором $u(x,y)$, а проекції точного розв'язку на скінченновимірні підпростори B_1 та B_2 відповідно $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$.

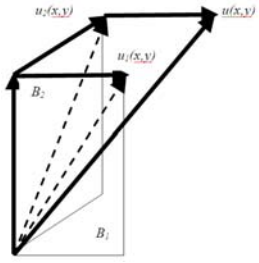

Рис. 1. Проекція точного розв'язку з нескінченновимірного гільбертового простору на скінченновимірні підпростори

Розглянемо чисельні методи на прикладі моделювання опори та балки, оскільки для цих конструктивних елементів існує точний аналітичний розв'язок. Розв'язки будемо шукати окремо як проекції на підпростір поліноміальних функцій та тригонометричних функцій. Поставимо за мету порівняти отримані розв'язки.

Опора. Оператор $\hat{A} = E\dfrac{d}{dx}$, що описує деформацію опори [12, 18] разом з умовою закріплення опори $u(0) = 0$ утворює крайову задачу

$$E\frac{d}{dx} = \sigma(x) , \qquad (4)$$

де $\sigma(x)$ – напруження, що виникає в перерізі мостової опори з координатою x.

З метою оцінки ефективності застосування числового проекційного методу розв'язку диференціального рівняння деформації мостової опори (4) використаємо прямий варіаційний метод Гальоркіна на базі поліноміальних і тригонометричних функцій. Розрахункову схему розглядуваної конструкції відповідно до застосовуваного числового методу подано на рис. 2.

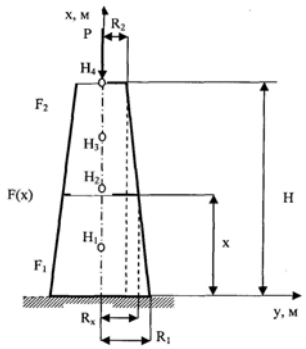

Рис. 2. Мостова опора – зрізаний конус з вузлами H_1, H_2, H_3, H_4

Таким чином, трактуємо мостову опору як скінчений елемент з чотирма вузлами H_1, H_2, H_3, H_4. Розв'язок диференціального рівняння (4) в змінних $\eta = x/H$ (H – висота опори) буде

$$u(\eta) = H_1 e(\eta)_1 + H_2 e(\eta)_2 + \\ + H_3 e(\eta)_3 + H_4 e(\eta)_4 , \qquad (5)$$

де $e(\eta)_i$ – базисні вектори в підпросторі Гілберта; H_i – вагові коефіцієнти, що знаходяться так:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}\vec{b} , \qquad (6)$$

де $\Lambda_{ij} = E\int_0^1 e_j(\eta)\frac{d\,e_i(\eta)}{d\,\eta}d\eta$;

$b_j = \int_0^1 e_j(\eta)\sigma(\eta)d\eta$.

Поліноміальний базис:

$$\begin{cases} e_1(\eta) = 16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4; \\ e_2(\eta) = -12\eta + 79\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4; \\ e_3(\eta) = \frac{16}{3}\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4; \\ e_4(\eta) = -\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4. \end{cases} \quad (7)$$

Тригонометричний базис:

$$\begin{cases} e_1(\eta) = -34{,}960 + 31{,}948\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\ +37{,}972\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3{,}0120\cos(\pi\eta) - \\ -14{,}473\sin(\pi\eta); \\ e_2(\eta) = -34{,}960 + 49{,}434\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \\ -49{,}434\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3{,}0120\cos(\pi\eta) - \\ -14{,}473\sin(\pi\eta); \\ e_3(\eta) = -34{,}960 + 37{,}972\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \\ -31{,}948\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3{,}0120\cos(\pi\eta) - \\ -14{,}473\sin(\pi\eta); \\ e_4(\eta) = 10{,}743 - 12{,}373\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \\ -8{,}1138\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 1{,}6295\cos(\pi\eta) + \\ +3{,}7407\sin(\pi\eta). \end{cases} \quad (8)$$

Порівняння розв'язків, отриманих в різних базисах в точці найбільшого переміщення показує, що відхилення від аналітичного розв'язку становить 0,4…0,03 %. Однак, слід зауважити, що вздовж опори відносна відмінність результатів $\varepsilon(\eta) = \frac{u_1(\eta) - u_2(\eta)}{\frac{u_1(\eta) + u_2(\eta)}{2}} \cdot 100$, отриманих в різних базисних функціях ($u_1(\eta)$ – деформація в тригонометричному базисі, $u_2(\eta)$ – деформація в поліноміальному базисі) має суттєву різницю, яку видно з графіка (рис. 3).

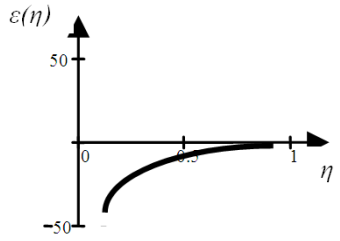

Рис. 3. Відносна відмінність результатів, отриманих в різних базисах

Отже, форма кривої на рис. 3 вказує на те, що біля основи опори має місце значна розбіжність результатів отриманих у різних базисах.

Балка. Оператор $\hat{A} = EJ\frac{d^4}{dx^4}$, що описує деформацію балки.

Диференціальне рівняння деформації балки [13] має вигляд

$$EJ\frac{d^4u}{d\,x^4} = q(x), \quad (9)$$

де E – модуль Юнга; $u(x)$ – поперечне зміщення осьової лінії балки; x – поздовжня координата; $q(x)$ – поперечне рівномірно розподілене навантаження на балку.

Розв'язок диференціального рівняння (9) в змінних $\eta = x/L$ (L – довжина балки) буде

$$u(\eta) = \sum_{i=1}^{n} H_i e(\eta)_i. \quad (10)$$

Розглянемо випадок, коли балка консольно защемлена зліва та вільно оперта справа відповідно до крайових умов

$$u(0) = u(1) = 0;\ \frac{d\,u(0)}{d\,\eta} = 0;\ \frac{d^2u(1)}{d\,\eta^2} = 0. \quad (11)$$

Розрахункову схему розглядуваної конструкції подано на рис. 4.

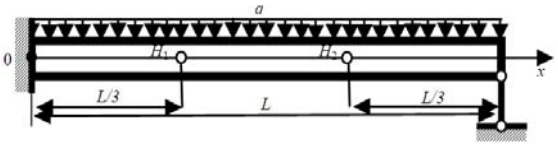

Рис. 4. Балка балка консольно закріплена зліва і вільнооперта справа:
L – довжина балки; q – поперечне рівномірно розподілене навантаження на балку; H_1 та H_2 – вузли всередині балки

Поліноміальний базис, $n=2$:

$$\begin{cases} e_1(\eta)=\eta(1-\eta)\times\left(\dfrac{486}{13}\eta-\dfrac{1134}{13}\eta^2+\dfrac{1215}{26}\eta^3\right); \\ e_2(\eta)=\eta(1-\eta)\times\left(-\dfrac{729}{52}\eta+\dfrac{1377}{26}\eta^2-\dfrac{1701}{52}\eta^3\right). \end{cases} \quad (12)$$

Тригонометричний базис, $n=3$:

$$\begin{cases} e_1(\eta)=0,538\cos(\pi\eta)-1,484\sin(\pi\eta)+ \\ +1,077\left(1-\cos(2\pi\eta)\right)-0,261\sin(2\pi\eta)- \\ -0,538\cos(3\pi\eta)+0,669\sin(3\pi\eta); \\ e_2(\eta)=-0,223\cos(\pi\eta)+1,261\sin(\pi\eta)- \\ -0,446\left(1-\cos(2\pi\eta)\right)+0,315\sin(2\pi\eta)+ \\ +0,223\cos(3\pi\eta)-0,631\sin(3\pi\eta); \\ e_3(\eta)=0,092\cos(\pi\eta)+0,038\sin(\pi\eta)+ \\ +0,185\left(1-\cos(2\pi\eta)\right)-0,631\sin(2\pi\eta)- \\ -0,092\cos(3\pi\eta)+0,408\sin(3\pi\eta). \end{cases} \quad (13)$$

Розбіжність результатів, отриманих числовим методом в різних базисах для консольно закріпленої з обох боків балки зменшується з 50 % (чотири вузли зі значеннями η = 0, 1/3, 2/3, 1) до 12 % (п'ять вузлів з значеннями η = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1), якщо збільшити кількість вузлів. Нами виявлено зростання відносної розбіжності результатів, отриманих в різних базисах при стрибкоподібній зміні навантаження вздовж балки.

З проведених нами досліджень випливають наступні положення:

– максимальна відносна розбіжність результатів, отриманих в різних базисах для вільно-опертої на обох краях балки становить ≈2 %,

– для консольно закріпленої ≈50 %. З рис. 5, *c* бачимо, що на консольно закріпленому краї ε % має більше значення, ніж на вільно опертому, відповідно ≈50 % та ≈ 2 %.

На даний час задачі обчислювального характеру з використанням персональних комп'ютерів (ПК) можна вирішувати на трьох основних рівнях:

1. В середовищі вибраної системи програмування;
2. На основі спеціальних обчислювальних процедур і програм;
3. При допомозі спеціальних пакетів програм.

Серед засобів третього рівня особливо слід виділити інтегрований багатофункціональний пакет MathCAD [7] фірми MathSoft Inc. Цей пакет дає можливість виконувати символьні операції. Застосуємо його для отримання наступного аналітичного розв'язку.

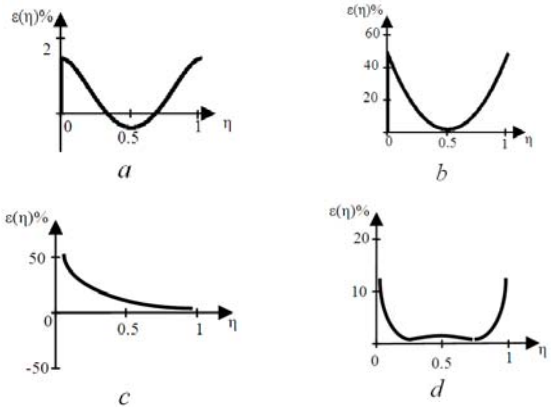

Рис. 5. Відносна відмінність результатів, отриманих в різних базисах:
a – балка вільно оперта з двох боків, *b* – балка консольно закріплена з двох боків, *c* – балка консольно закріплена зліва та вільно оперта справа, *d* – балка консольно закріплена з двох боків, але дискретизація більша

Аналітичний метод

Розглянемо деформацію тонкої залізобетонної мостової плити [11]. Оператор, що описує деформацію ізотропної плити

$$\hat{A}=D\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

де D – циліндрична жорсткість.

Диференціальне рівняння, що описує деформацію тонкої пластини (плити), можна записати так:

$$D\nabla^2\nabla^2 w=q, \quad (14)$$

де D – циліндрична жорсткість плити; ∇^2 – оператор Лапласа; w – поперечна деформація плити; q – питоме навантаження.

Запишемо диференціальне рівняння (14) у змінних (η,ξ):

$$\eta=\frac{x}{a};\quad \xi=\frac{y}{b}, \quad (15)$$

де a – довжина плити; b – ширина плити, що дозволяють компактно представити результати.

Диференціальне рівняння деформації плити:

$$\frac{1}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\eta}+2\frac{1}{a^2b^2}\frac{\partial^4 w}{\partial^2\eta\partial^2\xi}+\frac{1}{b^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi}=\frac{1}{D}q(\eta,\xi), \quad (16)$$

Розв'язок:

$$w(\eta,\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i\sin(i\pi\eta), \qquad (17)$$

де $Y_i = A_i\,\mathrm{sh}(\alpha\xi)+B_i\,\mathrm{ch}(\alpha\xi)+C_i y\cdot\mathrm{sh}(\alpha\xi)+$
$$+D_i y\cdot\mathrm{ch}(\alpha\xi)+\varphi_i(\xi), \qquad (18)$$

та $$\alpha=\frac{b}{a}i\pi. \qquad (19)$$

Крайові умови для вільноопертої з протилежних сторін балки і вільної з двох інших:

$$\begin{cases} W(0,\xi)=W(1,\xi)=0;\\ M_1(0,\xi)=M_1(1,\xi)=0;\\ M_2(\eta,0)=M_2(\eta,1)=0;\\ V_2(\eta,0)=V_2(\eta,1)=0. \end{cases} \qquad (20)$$

Локальне навантаження представимо як суму добутків двох k ступінчатих функцій, рис. 6.

$$q(\eta,\xi)=\frac{1}{ab}\sum_k\frac{F_k\lambda_k(\eta)\,\mu_k(\xi)}{\Delta\eta_k\,\Delta\xi_k}, \qquad (21)$$

де F_k − сила тиску колеса на мостову плиту;

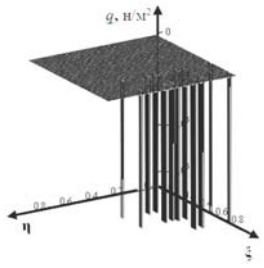

Рис. 6. Локальне навантаження 12 коліс

$$\begin{cases} \lambda_k(\eta)=\begin{cases}1 \text{ якщо } \eta_k\le\eta\le\eta_k+\Delta\eta_k,\\ 0 \quad \text{інакше;}\end{cases}\\ \mu_k(\xi)=\begin{cases}1 \text{ якщо } \xi_k\le\xi\le\xi_k+\Delta\xi_k;\\ 0 \quad \text{інакше.}\end{cases} \end{cases} \qquad (22)$$

$\eta_k, \xi_k, \Delta\eta_k, \Delta\xi_k,$ − положення та розміри площадок коліс.

Функцію $\mu(\xi)$ розкладемо в ряд Фур'є.

З крайових умов (20) знаходимо константи A_i, B_i, C_i, D_i , а з відповідного однорідного рівняння знаходимо функцію $\varphi_i(\xi)$ і одержуємо розв'язок диференціального рівняння (15):

$$W(\eta;\xi)=\frac{4}{\pi^3}\frac{b^2}{D}\sum_{k=1}^{K}F_k\sum_{i=1}^{N}f\begin{pmatrix} i;\nu;\eta;\\ \xi;\eta_k;\xi_k;\\ \Delta\eta_k;\Delta\xi_k;\\ a;b \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Використовуючи співвідношення (23), запишемо формулу для визначення циліндричної жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною деформацією плити

$$\mathrm{D}=\frac{4}{\pi^3}\frac{b^2}{w(\eta;\xi)}\sum_{k=1}^{K}F_k\sum_{i=1}^{N}f\begin{pmatrix} i;\nu;\eta;\\ \xi;\eta_k;\xi_k;\\ \Delta\eta_k;\Delta\xi_k;\\ a;b \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

де $\eta_p;\xi_p$ − координати точки вимірювання прогину моста.

За результатами статичного випробовування моста через р. Стара на автодорозі Мукачево – Рахів − Івано-Франківськ − Рогатин, км 92+700 в Закарпатській області розраховано інтегральну циліндричну жорсткість проїзної частини моста D = 3,777·10^{10} Н·м та ефективну товщину h = 1,239 м.

Подіявши відповідним оператором на функцію $w(\eta;\xi)$, отримаємо згинальний момент M_2 (рис. 7). Форма поверхні вказує на місце розміщення навантаження.

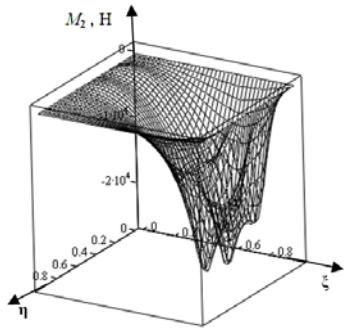

Рис. 7. Поверхневий графік згинального моменту M_2 в площині ξ = const

Оцінимо інтегральну точність отриманого розв'язку (23), підставивши його в вихідне диференціальне рівняння (4.61) та проінтегрувавши по всій поверхні. Значення отриманого інтегралу має наближатись до сумарного навантаження (в розглянутому випадку 46 т) тим ближче, чим більшу кількість гармонік матиме розв'язок (4.90). Отже, відносна похибка розв'язку обчислюється за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\left| D\int_0^a\int_0^b \nabla^2\nabla^2 w dxdy - \int_0^a\int_0^b q dxdy \right|}{\int_0^a\int_0^b q dxdy} 100 .$$

Диференціальна похибка буде, відповідно:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\left| D\nabla^2\nabla^2 w - q \right|}{q} 100 .$$

При 20 гармоніках ми отримали інтегральну похибку розв'язку диференціального рівняння деформації мостової плити прямокутної форми з точністю $\varepsilon = 3$ %.

Висновки

З проведених досліджень випливає, що дублювання розв'язків в двох різних базисах підвищує надійність результатів і дозволяє визначити необхідну степінь дискретизації моделі конструктивного елемента моста та обґрунтовано вибирати розміщення вузлів на поверхні або в об'ємі конструктивного елемента моста. В місцях консольного защемлення та стрибкоподібної зміни навантаження вузли повинні розміщуватися густіше.

Представлення деформації мостової плити у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних та тригонометричних функцій має перевагу над числовими методами розрахунку, тому що є найбільш адекватним та інформаційно містким. Завдяки такому представленню ми можемо отримати теоретично обґрунтовані співвідношення, що пов'язують результати статичних та динамічних випробувань із механічними параметрами плити, призначені для обробки результатів натурного експерименту.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Аргирис, Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц [Текст] / Дж. Аргирис; под ред. А. Ф. Смирнова : [пер. с англ.]. – М.: Изд-во иностр. лит. 1968. – 240 с.
2. Метод конечных элементов [Текст] / П. М. Варвак и др. – К.: Вища шк., 1981.
3. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичності [Текст] / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. Гавурин, М. К. Лекции по методам вичислений [Текст] / М. К. Гавурин. – М.: Наука, 1971. – 248 с.
5. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [Текст] / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
6. Демидович, В. Н., Основы вычислительной математики [Текст] / В. Н. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
7. Дьяконов, В. Mathcad 2000 [Текст] : учебный курс / В. Дьяков. – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.
8. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
9. Коллатц, Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика [Текст] / Ф. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 444 с.
10. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 544 с.
11. Лучко, Й. Диференціальне рівняння деформації плити та його застосування [Текст] / Й. Лучко, М. Ігнатишин // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 2009. – № 2.
12. Лучко, Й. Й. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори аналітичними та числовими методами [Текст] / Й. Й. Лучко, Є. Г. Іваник, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій (зб. наук. пр.). – 2007. – Вип. 9. – Львів: Каменяр, 2007.
13. Лучко, Й. Й. Визначення деформації балкових елементів аналітичними та числовими методами [Текст] / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій (зб. наук. пр.). – 2006. – Вип. 8. – Львів: Каменяр, 2006.
14. Мышкис, А. Д. Математика для втузов [Текст] : спец. курсы / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
15. Образцов, И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкцій [Текст] / И. Ф. Образцов. – М.: Машиностроение, 1966. – 392 с.
16. Оден, Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Д. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
17. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
18. Справочник по сопротивлению материалов [Текст]. – 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. Г. С. Писаренко. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
19. Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

Надійшла до редколегії 15.03.2010.
Прийнята до друку 23.03.2010.