

Й. Й. ЛУЧКО (Львівська філія ДПТУ), І. М. ДОБРЯНСЬКИЙ (Львівський національний аграрний університет)

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК І ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАЛКИ ПРИ ЗГІНІ

У статті наводиться розв'язок задачі теорії пружності про згин балки, яка будується з врахуванням наявності скінченних опорних ділянок, які сприймають тимчасове навантаження в околі торця балки, де можуть виникати і розповсюджуватись тріщини.

В статье изложено решение задачи теории упругости об изгибе балки, которая строится с учетом наличия конечных опорных участков, воспринимающих временную загрузку в окрестности торца, где могут зарождаться и распространяться трещины.

In the paper it is presented a solution for the problem of elasticity theory about the beam bending, which is being constructed with account of available finite base areas taking up a temporary load in the district of beam edge, where the cracks can initiate and propagate.

Постановка проблеми

Залізобетон на сьогодні є основним складником конструктивних елементів будівельної індустрії. Враховуючи нестримний ріст масштабів будівництва зрозумілою є актуальність проблеми раціонального проектування залізобетонних конструкцій з використанням сучасних модифікованих методик, бо навіть незначна економія матеріалу на виробках масового виробництва дає значну економію відповідних матеріальних ресурсів.

Аналіз досліджень і публікацій з даної проблематики

Раціональність та економічність проектованої конструкції є залежними від багатьох чинників, важливим серед яких це методика розрахунку. Хоча на даний час методи розрахунку будівельних конструкцій надзвичайно розвинуті, але їх удосконалення триває постійно [1–5].

Постановка завдання

Поставимо метою побудувати схему уточненого розрахунку балки при згині на основі методів теорії пружності. При цьому врахуємо наявність ділянок скінченної довжини в околі торців балки, які сприймають тимчасове навантаження. В такій постановці граничні умови на кінцях балки можна задовольнити точно без притягнення принципу Сен-Венана. Розрахункову схему приймемо у вигляді балки прямокутного поперечного січення одиничної ширини, висотою H і довжиною $2L$, на двох

шарнірних опорах, яка перебуває в умовах дії розподіленого навантаження $p(x)$. Вважаємо, що балка є ізотропним лінійно-пружним матеріальним континуумом. Нижня і верхня кромки балки вільні від дотичних зусиль, на торцях напруження відсутні (рис. 1, *a*).

Виклад основного матеріалу досліджень

В літературі [6, 7] відомі ефективні методи розв'язування задачі про згин балки при сталому зовнішньому навантаженні. Однак у вказаних роботах задача про згин балки замінена задачею про рівновагу полоси, до бокових граней якої прикладено дотичні зусилля $\tau_{xy}(L, y)$ (рис. 1, *b*), які зрівноважують зовнішнє навантаження p , тобто

$$\int_0^H \tau_{xy}(L, y) dy = pL. \quad (1)$$

Враховуючи принцип Сен-Венана, наявні в літературі розв'язки є досить адекватними при описі згину балок. Але подальший аналіз задачі про визначення напружено-деформованого стану залізобетонної балки з тріщиною вимагає більш точного підходу, особливо в околі точок $x = \pm L$, тобто на торцях балки, де можливе зародження і розповсюдження похилих тріщин.

В даній роботі поставимо задачу про отримання розрахункових формул для компонент тензора напружень у балці в довільному перерізі, в тому числі й там, де можливе зародження тріщини.

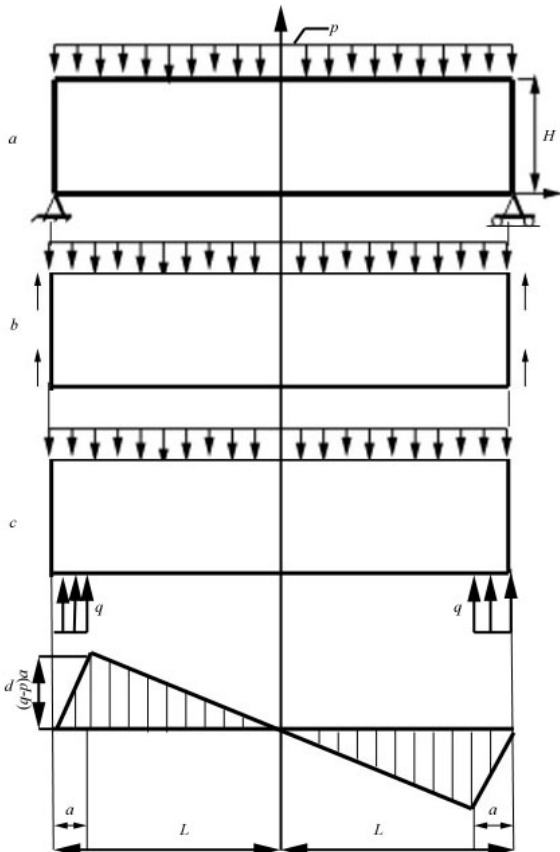


Рис. 1. Статично-визначена балка: *a* – балка на двох опорах; *b* – рівновага полоси з дотичними зусиллями на гранях; *c* – рівномірне розподілення опорних реакцій; *d* – епюра перерізувачі сил

Запишемо граничні умови задачі:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -p(x) \text{ при } y = H, \\ \tau_{xy} &= 0 \text{ при } y = 0, y = H, \\ \sigma_x &= 0, \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = \pm L. \end{aligned} \quad (2)$$

Опорні реакції замінимо розподіленням навантаженням, яке діє на деякій скінченій ділянці по ширині опори.

Почнемо з більш простішого випадку сталого навантаження в околі опор (рис. 1, *c*). Доповнимо граничні умови (2), вважаючи що при $y = 0$ має місце додаткова умова

$$\sigma_y = -q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq L - a, \\ q, & L - a < |x| \leq L, \end{cases} \quad (3)$$

причому в умові (3) a – ширина опори.

В результаті маємо задачу теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану в системі, що розглядається, за граничних умов (2), (3).

Розкладемо зовнішнє навантаження $p(x)$ в ряд Фур'є за косинусами з вимогою про відсут-

ність вільного члена шляхом продовження функції $p(x)$ на інтервал довжиною $4L$ ($-2L \leq x \leq 2L$) таким чином: $p(2L - x) = -p(x)$; $0 \leq x \leq L$; $p(-x) = p(x)$; $-2L \leq x \leq 2L$ (рис. 2, *a*). В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \alpha_k x, \quad p_{2k} = 0, \\ p_k &= \frac{4p}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}, \quad k = 2n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Поступаючи аналогічним чином стосовно функції $q(x)$ (рис. 2, *b*) у граничній умові (3), матимемо

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos \alpha_k x, \\ q_k &= \frac{4q(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2L^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

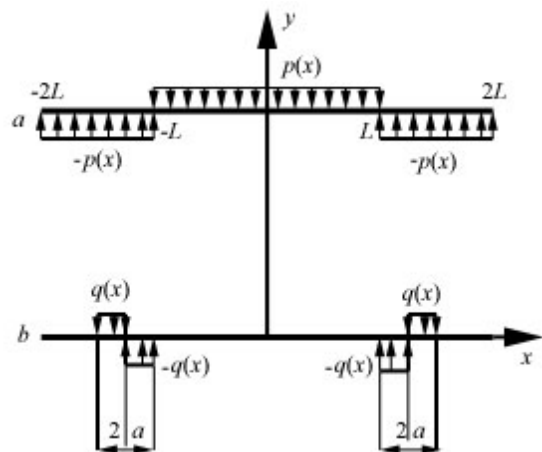


Рис. 2. Графік функцій $p(x)$ (*a*) і $q(x)$ (*b*) на розширеному інтервалі ($-2L \leq x \leq 2L$)

Шукані компоненти тензора напружень виразимо через бігармонійну функцію $E\text{рi } U$ [8]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Оскільки функція $E\text{рi}$ парна по змінній x , то її можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \text{ch} \alpha_k y + B'_k y \text{ch} \alpha_k y + \\ &+ B_k \text{sh} \alpha_k y + C_k y \text{sh} \alpha_k y) \cos \alpha_k x, \end{aligned}$$

на основі чого маємо таке представлення для компонент тензора напружень:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k \alpha_k + 2C_k) \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + (2B'_k + B_k \alpha_k) \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + y \alpha_k^2 (B'_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x; \\ \sigma_y = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B'_k y \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + C_k y \operatorname{sh} \alpha_k y) \cos \alpha_k x; \\ \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [(A_k \alpha_k + C_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + (B'_k + B_k \alpha_k) \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + y \alpha_k (B'_k \operatorname{sh} \alpha_k y + C_k \operatorname{ch} \alpha_k y)] \sin \alpha_k x. \end{array} \right. \quad (6)$$

На основі залежностей (6) з граничної умови $\sigma_x = 0$ при $x = \pm L$ маємо $\alpha_k = \frac{\pi k}{2L}$ ($k = 2n - 1$). Далі з умови (3) буде

$$A_k = \frac{q_k}{\alpha_k^2}. \quad (7)$$

Задоволення граничної умови $\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$ дає

$$B'_k = -\alpha_k B_k. \quad (8)$$

В результаті, беручи до уваги залежності (5), (7), (8), співвідношення (6) можна переписати таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} [(q_k + 2C_k \alpha_k) \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y - \\ - B_k \alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x; \\ \sigma_y = -\sum_{k=1}^{\infty} [q_k \operatorname{ch} \alpha_k y + \alpha_k^2 B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x; \\ \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} [(q_k + C_k \alpha_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + C_k \operatorname{ch} \alpha_k y)] \sin \alpha_k x. \end{array} \right. \quad (9)$$

В отриманих залежностях (9) невідомими залишаються коефіцієнти B_k , C_k ; для їх визначення використаємо дві з умов (2), а саме:

$\tau_{xy} = 0$ і $\sigma_y = -p(x)$ при $y = H$. В результаті приходимо до системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} q_k \operatorname{sh} \alpha_k H + C_k \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k H + \\ + H \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \operatorname{sh} \alpha_k H + C_k \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k H) = 0; \\ q_k \operatorname{ch} \alpha_k H + B_k \alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k H + \\ + H \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \operatorname{ch} \alpha_k H + C_k \operatorname{sh} \alpha_k H) = p_k, \end{aligned}$$

розв'язком якої є

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{\alpha_k H \operatorname{ch} \alpha_k H + \operatorname{sh} \alpha_k H}{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2} p_k - \\ &- \frac{\operatorname{sh} \alpha_k H \alpha_k H + \alpha_k H}{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2} q_k; \\ C_k &= \frac{\operatorname{sh} \alpha_k H (p_k \alpha_k H - q_k \operatorname{sh} \alpha_k H)}{\alpha_k (\operatorname{sh}^2 \alpha_k H - \alpha_k^2 H^2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Формули (9) і залежності (10) дають розв'язок розглядуваної задачі про згин балки, за виключенням умови відсутності дотичних напружень на торцях балки. Для рівнодійної R напружень τ_{xy} маємо формулу

$$R = \int_0^y \tau_{xy} dy \text{ при } x = \pm L,$$

підставляючи в яку вираз для τ_{xy} з (9), отримуємо:

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k - q_k}{\alpha_k} \sin \alpha_k L. \quad (11)$$

Зауважимо, що права частина виразу (11) є рівнодійною зовнішнього силового навантаження $p(x)$ та опорної реакції $q(x)$. Використавши співвідношення (4), (5), дістаємо вираз для рівнодійної:

$$\begin{aligned} R &= p \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \\ &- q \frac{8L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2L} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Запишемо відомі [9] залежності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\xi}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \xi \right),$$

підставляючи які у співвідношення (12), поклавши при цьому $\xi = \frac{\pi a}{2L}$, приходимо до рівності

$R = pL - qa$. Однак з умови рівноваги балки впливає $pL = qa$, звідки остаточно маємо $R = 0$, тобто побудований розв'язок про згин балки на основі рівнянь і залежностей теорії пружності задовольняє всім граничним умовам (2) за винятком відсутності дотичних зусиль на торцях балки, де маємо $R = 0$ при $x = \pm L$.

Будь-який метод розв'язування математично сформульованої задачі науково-технічного спрямування має забезпечити отримання результату, який би кількісно і якісно відображав найсуттєвіші особливості досліджуваної проблеми.

Основна мета розгляду задач механіки полягає в тому, щоб отримані аналітичні залежності набули значної завершеності; цієї мети можна досягнути, якщо отримані загальні формули допускають проведення обчислень з фізично виправданою точністю.

Залежності (9) мають дещо незручну форму, пов'язану з наявністю безмежних рядів, в яких до того ж фігурують гіперболічні синуси і косинуси. Тому для побудови розрахункових алгоритмів на основі отриманих залежностей необхідно здійснити перетворення виразів (9) у форму, зручну для програмування з метою недопущення переповнення при виконанні програми.

Загальний аналіз збіжності рядів для напружень з використанням асимптотичних наближень виявив дуже повільну їх збіжність на границі тіла і в точках, достатньо близьких до границі. Тому виконаємо процедуру покращення збіжності на основі виділення і представлення в замкнутому вигляді їх повільно збіжних частин [10].

Оскільки $\alpha_k y \gg 1$, то $\text{sh}^2 \alpha_k H \gg \alpha_k^2 H^2$, $\text{sh} \alpha_k y \approx \text{ch} \alpha_k y$. З урахуванням вказаних асимптоти формули для сталих B_k , C_k можна подати у такому вигляді

$$B_k = \frac{(\alpha_k H + 1)}{\alpha_k^2 \text{sh}^2 \alpha_k H} p_k - \frac{1}{\alpha_k^2} q_k,$$

$$C_k = \frac{1}{\text{sh} \alpha_k H} p_k - \frac{1}{\alpha_k} q_k.$$

В результаті отримуємо наступні формули для визначення напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{k=1}^{k_x-1} \left[(q_k + 2C_k \alpha_k) \alpha_k \text{ch} \alpha_k y - \right. \\ &\quad \left. - B_k \alpha_k^2 \text{sh} \alpha_k y + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \text{ch} \alpha_k y + C_k \text{sh} \alpha_k y) \right] \cos \alpha_k x + \\ &\quad + \sum_{k=k_x}^{\infty} (\alpha_k H - \alpha_k y - 1) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \cos \alpha_k; \\ \sigma_y &= - \sum_{k=1}^{k_y-1} \left[q_k \text{ch} \alpha_k y + \alpha_k^2 B_k \text{sh} \alpha_k y + \right. \\ &\quad \left. + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \text{ch} \alpha_k y + C_k \text{sh} \alpha_k y) \right] \cos \alpha_k x + \\ &\quad + \sum_{k=k_y}^{\infty} (\alpha_k y - \alpha_k H - 1) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \cos \alpha_k; \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{k_{xy}-1} \left[(q_k + C_k \alpha_k) \text{sh} \alpha_k y + \right. \\ &\quad \left. + y \alpha_k^2 (-\alpha_k B_k \text{sh} \alpha_k y + C_k \text{ch} \alpha_k y) \right] \sin \alpha_k x + \\ &\quad + \sum_{k=k_{xy}}^{\infty} (\alpha_k y - \alpha_k H) p_k e^{-\alpha_k (H-y)} \sin \alpha_k. \end{aligned} \quad (13)$$

У формулах (13) номери k_x, k_y, k_{xy} – найменші значення індексу сумування, за яких прямий розрахунок за формулами (9) дає переповнення порядку відповідно для напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} .

Числовий аналіз за розрахунковими формулами (13) проведено при таких параметрах: $H/L = 0,3$; $a/l = 0,1$. Результати досліджень безрозмірних величин напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} показано у вигляді графіків на рис. 3–6.

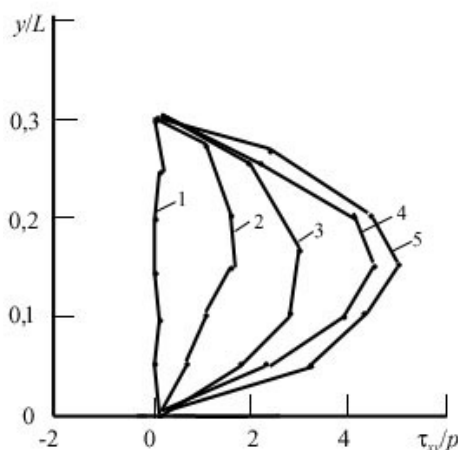


Рис. 3. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p

напруження залежно від висоти: крива:
1 – $x/L = -1$; 2 – $x/L = -0,95$; 3 – $x/L = -0,9$;
4 – $x/L = -0,85$; 5 – $x/L = -0,8$

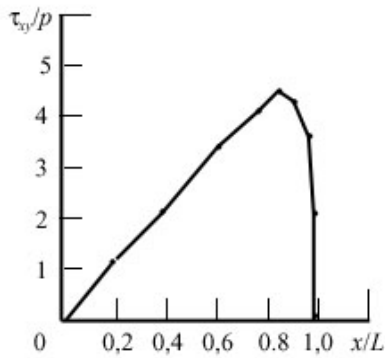


Рис. 4. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

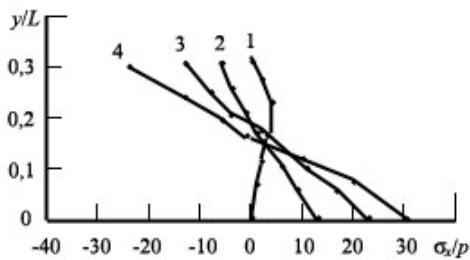


Рис. 5. Зміна безрозмірного нормального σ_x/p напруження залежно від висоти: крива: 1 - $x/L = -1$; 2 - $x/L = -0,75$; 3 - $x/L = -0,5$; 4 - $x/L = 0$

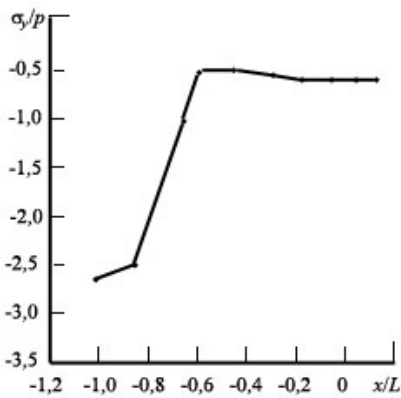


Рис. 6. Зміна безрозмірного σ_y/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

Співставимо результати розрахунку компонент σ_x і τ_{xy} , обчислених згідно формул (13), з відповідними значеннями, розрахованими за відомими формулами опору матеріалів [11]:

$$\sigma_x = \frac{M(x) \left(\frac{H}{2} - y \right)}{I_x}, \quad \tau_{xy} = \frac{Q(x) S(y)}{I_x b}. \quad (14)$$

У формулах (14) позначено: $M(x)$ – згинний момент; $Q(x)$ – перерізуюча сила, епюра якої представлена на рис. 1, d ; $I_x = \frac{bH^3}{12}$ – момент інерції поперечного перерізу відносно головної центральної осі; $S(y) = \frac{y(H-y)b}{2}$ – статичний момент частини поперечного перерізу відносно головної центральної осі.

При підрахунках згідно залежностей (14) згинний момент обчислювався за формулами:

- над опорою ($-L < x < -L + a$)

$$M(x) = (q - p) \frac{(L + x)^2}{2};$$

- між опорами ($-L + a < x < L - a$)

$$M(x) = qa \left(L + x - \frac{a}{2} \right) - p \frac{(L + x)^2}{2}.$$

Результати відповідних числових розрахунків дотичних і нормальних напружень показано на рис. 7 і рис. 8.

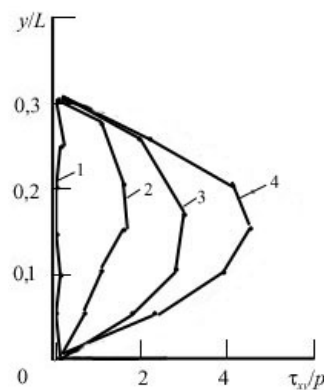


Рис. 7. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

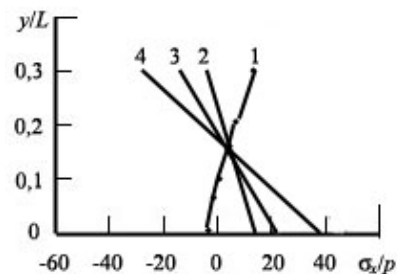


Рис. 8. Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy}/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

Висновки

Запропоновано аналітичний метод визначення напружень згинної балки на базі рівнянь теорії пружності. На відміну від методів опору матеріалів розв'язок будується без застосування принципу Сен-Венана; це досягається шляхом заміни опорних реакцій дією сталого розподіленого навантаження на деякій скінченній ділянці в околі опор. Виконано співставлення числових результатів поведінки нормальних і дотичних напружень з відповідними значеннями, підрахованими за формулами опору матеріалів. Встановлено, що вони співпадають на ділянці 0,8 довжини прольоту балки.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гвоздев, А. А. К вопросу о теории железобетонных конструкций [Текст] / А. А. Гвоздев // Бетон и железобетон. – 1980. – № 4. – С. 29-31.
2. Зайцев, Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения [Текст] / Ю. В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
3. Лучко, Й. Й. Механика разрушения бетона (обзор) [Текст] / Й. Й. Лучко // Физ.-хим. механика материалов. – 1991. – № 3. – С. 3-13.
4. Холмянский, М. М. К использованию расширенной информации при расчете железобетонных элементов на чистый изгиб [Текст] / М. М. Холмянский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 2. – С. 38-42.
5. Панасюк, В. В. О важнейших исследованиях по физико-химической механике материалов [Текст] / В. В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – 1974. – № 4. – С. 3-13.
6. Тимошенко, С. П. Статический и динамические проблемы теории упругости [Текст] / С. П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1975. – 506 с.
7. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1961. – 583 с.
8. Новацкий, В. Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1986. – 1108 с.
10. Гринченко, В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров [Текст] / В. Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
11. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Надійшла до редколегії 01.03.2010.

Прийнята до друку 15.03.2010.