

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЕШЕХОДНОГО МОСТА

У роботі, що пропонується до розгляду, висвітлено питання раціоналізації конструкції статично невизначеної сталобетонної шпренгельної балки пішохідного моста. Включення шпренгеля в роботу балки є ефективним засобом для збільшення її несучої здатності, жорсткості та, у багатьох випадках, економічності.

В настоящей работе излагаются вопросы рационализации конструкции статически неопределимой сталобетонной шпренгельной балки пешеходного моста. Включение шпренгеля в работу конструкции является эффективным способом повышения ее несущей способности, жесткости и, во многих случаях, экономичности.

In the paper the issues of obtaining the rational structure of statically indeterminate steel concrete trussed beam of a foot bridge are described. The tie rod insertion is very efficient in increasing of the structure's carrying capacity, rigidity and (in many cases) economy.

В практике проектирования и строительства транспортных искусственных сооружений, все чаще в качестве элементов пролетных строений используются комбинированные конструкции, в частности сталобетонные и сталежелезобетонные. При проектировании подобных конструкций значительное внимание уделяется поиску рациональных расчетных схем, иначе оптимальному проектированию, что позволяет значительно улучшить показатели материалоемкости, стоимости и трудоемкости возводимых конструкций.

Отдельной задачей поиска рационального решения комбинированных конструкций является определение частот собственных колебаний. Поэтому исследования, направленные на

решение подобного рода задач с доведением их до практического применения, является актуальной задачей.

Рассмотрим шпренгельную балку (рис. 1, а) длиной 16 м., в которой верхний пояс выполнен из двутавра № 24, а нижний пояс, шпренгель, – из двух уголков 125×125×10 (раскосы) и двух уголков 100×100×10 (стойки). Балка загружена равномерно распределенной, в верхнем поясе, нагрузкой.

Для определения частот и форм свободных колебаний, представим шпренгельную балку в виде балки с распределенной массой и двумя сосредоточенными массами в местах расположения стоек шпренгеля (рис. 1, б).

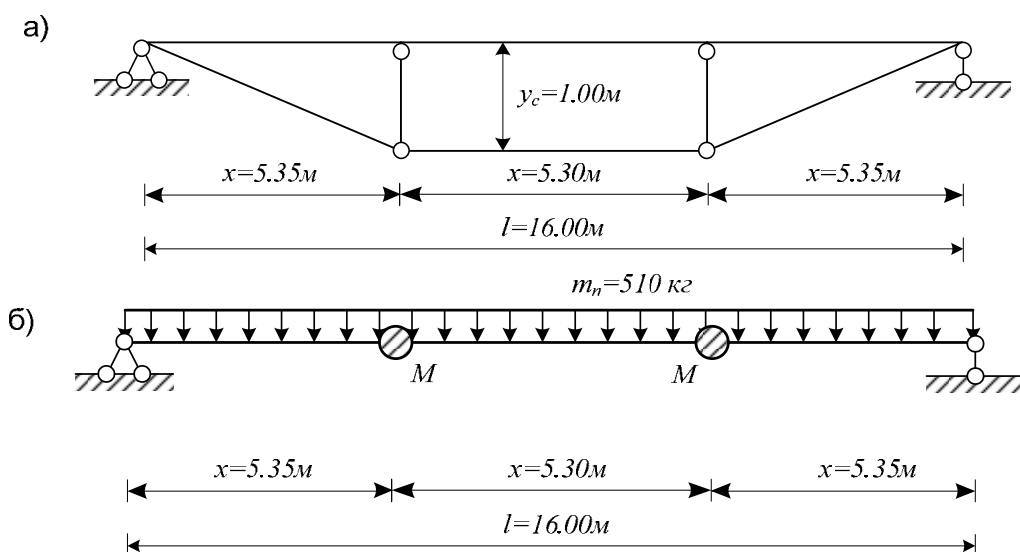


Рис. 1. Конструкция комбинированной балки

Определим величины этих масс в кг:

– приведенная масса:

$$m_{\text{п}} = \frac{q}{g} = \frac{5 \times 10^3}{9,81} = 510;$$

– точечная масса:

$$M = m_4 \cdot 1 + m_3 \cdot 2,65 + m_2 \cdot 2,72 = \\ = 30,2 + 101,23 + 103,904 = 235,334,$$

где  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки;  $m_2, m_3, m_4$  – масса элементов шпренгеля (раскосов и стоек).

Приведенная жесткость балки может быть определена из условия равенства прогибов по середине пролета шпренгельной и принимаемой балки, от постоянной нагрузки:

$$\Delta_{1f}^{\text{б}} = \Delta_{1f}^{\text{ш}}, \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta_{1f}^{\text{б}} = \frac{5q\ell^4}{384EI_{\text{п}}};$$

$$\Delta_{1f}^{\text{ш}} = \frac{5q\ell^4}{384EI_1} \times \\ \times \left( 1 - \frac{4(3\ell^2 - 4x^2)(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)}{C\ell^4} \right) \cdot y_c.$$

Определим приведенный момент инерции балки в см<sup>4</sup>:

$$I_{\text{п}} = \frac{I_1}{1 - \frac{4(3\ell^2 - 4x^2)(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3)}{C\ell^4}} = \\ = 112650.$$

Решение задачи по определению частот колебаний будем производить методом начальных параметров [1]. При  $x=0$  начальные параметры будут равны:

$$y_0 = 0; \varphi_0 \neq 0; M_0 = 0; Q_0 \neq 0.$$

Неизвестные начальные параметры определяются из условий закрепления концов балки при  $x = \ell = 16$  м;  $y_{\ell} = 0; M_{\ell} = 0$ .

Запишем выражения для прогиба и изгибающего момента на участке балки, примыкающем к правой опоре, заменив частоты вынужденных колебаний  $\theta$  на частоты собственных колебаний системы  $\omega$ , получим:

$$y_x = \varphi_0 \frac{B_x}{K} + Q_0 \frac{D_x}{EI_{\text{п}}K^3} + \frac{\omega^2}{EI_{\text{п}}K^3} M \times \\ \times y_d D_{x-d} + \frac{\omega^2}{EI_{\text{п}}K^3} M \cdot y_{\ell-d} D_{x-(\ell-d)} \quad (2)$$

$$M_x = \varphi_0 D_x EI_{\text{п}}K + Q_0 \frac{B_x}{K} + \frac{\omega^2}{K} M \times \\ \times y_d B_{x-d} + \frac{\omega^2}{K} M \cdot y_{\ell-d} B_{x-(\ell-d)}, \quad (3)$$

где  $B_x, D_x$  – функции влияния;  $y_d, y_{\ell-d}$  – амплитуда прогиба сечения в месте расположения сосредоточенных масс  $M$ ;

$$K = \sqrt[4]{\frac{m_1 \omega^2}{EI_{\text{п}}}}. \quad (4)$$

Преобразуем выражения (2) и (3), исключив из них частоты собственных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{K^4 EI_{\text{п}}}{m_1}. \quad (5)$$

Кроме того, запишем выражения для амплитуд прогибов  $y_d, y_{\ell-d}$ :

$$y_d = \varphi_0 \frac{B_d}{K} + Q_0 \frac{D_d}{EI_{\text{п}}K^3}; \quad (6)$$

$$y_{\ell-d} = \varphi_0 \frac{B_{\ell-d}}{K} + Q_0 \frac{D_{\ell-d}}{EI_{\text{п}}K^3} + \\ + K \frac{M}{m_1} \cdot y_d \cdot D_{\ell-2d} = \varphi_0 \left( \frac{B_{\ell-d}}{K} + \frac{M}{m_1} \cdot B_d \cdot D_{\ell-2d} \right) + \\ + Q_0 \left( \frac{D_{\ell-d}}{EI_{\text{п}}K^3} + \frac{M}{m_1} \frac{D_d \cdot D_{\ell-d}}{EI_{\text{п}}K^2} \right). \quad (7)$$

Теперь с учетом выражений (6) и (7) перепишем выражения (2) и (3):

$$y_x = \varphi_0 \left( \frac{B_x}{K} + \frac{M}{m_1} B_d D_{x-d} + \frac{M}{m_1} B_{\ell-d} D_{x-(\ell-d)} + \right. \\ \left. + K \frac{M^2}{m_1^2} B_d D_{x-(\ell-d)} \cdot D_{\ell-2d} \right) + Q_0 \left( \frac{D_x}{EI_{\text{п}}K^3} + \right. \\ \left. + \frac{M}{m_1} \frac{D_d \cdot D_{x-d}}{EI_{\text{п}}K^2} + \frac{M}{m_1} \frac{D_{\ell-d} \cdot D_{x-(\ell-d)}}{EI_{\text{п}}K^2} + \right. \\ \left. + \frac{M^2}{m_1^2} \frac{D_d \cdot D_{\ell-2d} \cdot D_{x-(\ell-d)}}{EI_{\text{п}}K} \right); \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
M_x = & \varphi_0(D_x EI_{np} K + \frac{M}{m_1} EI_{np} K^2 B_d B_{x-d} + \\
& + \frac{M}{m_1} EI_{np} K^2 B_{\ell-d} B_{x-(\ell-d)} + \frac{M^2}{m_1^2} EI_{np} \times \\
& \times K^3 B_d D_{\ell-2d} B_{x-(\ell-d)}) + Q_0(\frac{B_x}{K} + \\
& + \frac{M}{m_1} \cdot D_d \cdot B_{x-d} + \frac{M}{m_1} \cdot D_{\ell-d} \cdot B_{x-(\ell-d)} + \\
& + K \frac{M^2}{m_1^2} \cdot D_d \cdot D_{\ell-2d} \cdot B_{x-(\ell-d)}). \quad (9)
\end{aligned}$$

Для начальных параметров, в случае когда  $x = \ell$ , приравняем выражения (8) и (9) к нулю. Получаем однородные уравнения. Отличное от нуля решение может быть получено при равенстве нулю определителя из коэффициентов при  $\varphi_0$  и  $Q_0$ .

Методом последовательных приближений найдем решение, полученного трансцендентного уравнения [2]. Определим некоторые из входящих величин:

$$EI_{np} = 2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 112650 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-3} = 232059;$$

$$\frac{M}{m_1} = \frac{235,334}{510} = 0,461; \quad \frac{M^2}{m_1^2} = 0,213.$$

Раскроем определитель:

$$\begin{aligned}
& (\frac{B_\ell}{K} + \frac{M}{m_1}(B_d D_{\ell-d} + B_{\ell-d} D_d) + \frac{M^2}{m_1^2} K B_d \times \\
& \times D_d D_{\ell-2d})^2 - (D_\ell + 2 \frac{M}{m_1} K B_d B_{\ell-d} + \\
& + \frac{M^2}{m_1^2} K^2 B_d^2 D_{\ell-2d}) \times (\frac{D_\ell}{K^2} + \\
& + 2 \frac{M}{m_1} \frac{D_d D_{\ell-d}}{K} + \frac{M^2}{m_1^2} D_d^2 D_{\ell-2d}) = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Первое приближение: задаемся значением

$$K = 0,144 \frac{1}{m}. \quad \text{Тогда } K\ell = 0,144 \cdot 16 = 2,30;$$

$$Kd = 0,144 \cdot 5,35 = 0,77;$$

$$K(\ell - d) = 0,144 \cdot 10,65 = 1,53;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,144 \cdot 5,30 = 0,76.$$

По этим аргументам определяем значение функций влияния:  $B_\ell = 2,84133$ ;  $D_\ell = 2,09562$ ;  $B_d = 0,77248$ ;  $D_d = 0,07691$ ;  $D_{\ell-2d} = 0,07409$ ;  $B_{\ell-d} = 1,60015$ ;  $D_{\ell-d} = 0,60160$ .

Проверим сходимость уравнения (10):

$$\begin{aligned}
& 400,10262 - 2,26132 \times 101,35819 = \\
& = 170,89952 \neq 0.
\end{aligned}$$

Второе приближение: задаемся значением

$$K = 0,125 \frac{1}{m}. \quad \text{Тогда } K\ell = 0,125 \cdot 16 = 2;$$

$$Kd = 0,125 \cdot 5,35 = 0,67;$$

$$K(\ell - d) = 0,125 \cdot 10,65 = 1,33;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,125 \cdot 5,30 = 0,66;$$

$$B_\ell = 2,26808; \quad D_\ell = 1,35828; \quad B_d = 0,67152;$$

$$D_d = 0,05084; \quad D_{\ell-2d} = 0,04873; \quad B_{\ell-d} = 1,36514;$$

$$D_{\ell-d} = 0,39466.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$\begin{aligned}
& 334,84808 - 1,46452 \times 87,07794 = \\
& = 207,32033 \neq 0.
\end{aligned}$$

Третье приближение: задаемся значением

$$K = 0,225 \frac{1}{m}. \quad \text{Тогда } K\ell = 0,225 \cdot 16 = 3,6;$$

$$Kd = 0,225 \cdot 5,35 = 1,20;$$

$$K(\ell - d) = 0,225 \cdot 10,65 = 2,40;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,225 \cdot 5,30 = 1,19;$$

$$B_\ell = 8,92147; \quad D_\ell = 9,36399; \quad B_d = 1,22075;$$

$$D_d = 0,28871; \quad D_{\ell-2d} = 0,28206; \quad B_{\ell-d} = 3,07085;$$

$$D_{\ell-d} = 2,39537.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$\begin{aligned}
& 1714,99432 - 787,07862 \times 187,80660 = \\
& = -146103,5663 \neq 0.
\end{aligned}$$

Четвертое приближение: задаемся значени-

$$\text{ем } K = 0,175 \frac{1}{m}. \quad \text{Тогда } K\ell = 0,175 \cdot 16 = 2,8;$$

$$Kd = 0,175 \cdot 5,35 = 0,94;$$

$$K(\ell - d) = 0,175 \cdot 10,65 = 1,86;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,175 \cdot 5,30 = 0,93;$$

$$B_\ell = 4,26346; \quad D_\ell = 3,92846; \quad B_d = 0,94628;$$

$$D_d = 0,13970; \quad D_{\ell-2d} = 0,13517; \quad B_{\ell-d} = 2,04754;$$

$$D_{\ell-d} = 1,09022.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$\begin{aligned}
& 623,53845 - 4,24745 \times 129,07923 = \\
& = 75,28073 \neq 0.
\end{aligned}$$

Пятое приближение: задаемся значением

$$K = 0,2 \frac{1}{m}. \quad \text{Тогда } K\ell = 0,2 \cdot 16 = 3,2;$$

$$Kd = 0,2 \cdot 5,35 = 1,07;$$

$$K(\ell - d) = 0,2 \cdot 10,65 = 2,13;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,2 \cdot 5,30 = 1,06;$$

$$B_\ell = 6,09375; \quad D_\ell = 6,15212; \quad B_d = 1,09190;$$

$$D_d = 0,20561; \quad D_{\ell-2d} = 0,20008; \quad B_{\ell-d} = 2,49961;$$

$$D_{\ell-d} = 1,65285.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$994,26345 - 6,66728 \times 155,37148 =$$

$$= -41,64191 \neq 0.$$

Шестое приближение: задаемся значением

$$K = 0,1875 \frac{1}{\text{м}}. \quad \text{Тогда} \quad K\ell = 0,1875 \cdot 16 = 3,00;$$

$$Kd = 0,1875 \cdot 5,35 = 1,00;$$

$$K(\ell - d) = 0,1875 \cdot 10,65 = 2,00;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,1875 \cdot 5,30 = 0,99;$$

$$B_\ell = 5,07949; \quad D_\ell = 4,93837; \quad B_d = 1,00833;$$

$$D_d = 0,16686; \quad D_{\ell-2d} = 0,16233; \quad B_{\ell-d} = 2,26808;$$

$$D_{\ell-d} = 1,35828.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$778,27349 - 5,34407 \times 141,58463 = 21,63505 \neq 0.$$

Седьмое приближение: задаемся значением

$$K = 0,1925 \frac{1}{\text{м}}. \quad \text{Тогда} \quad K\ell = 0,1925 \cdot 16 = 3,08;$$

$$Kd = 0,1925 \cdot 5,35 = 1,03;$$

$$K(\ell - d) = 0,1925 \cdot 10,65 = 2,05;$$

$$K(\ell - 2d) = 0,1925 \cdot 5,30 = 1,02;$$

$$B_\ell = 5,46311; \quad D_\ell = 5,40162; \quad B_d = 1,03986;$$

$$D_d = 0,18347; \quad D_{\ell-2d} = 0,17793; \quad B_{\ell-d} = 2,35530;$$

$$D_{\ell-d} = 1,46882.$$

Проверим сходимость уравнения (10):

$$857,58258 - 5,84885 \times 147,0601238 =$$

$$= -2,5499 \approx 0.$$

Определим частоту собственных колебаний:

$$\omega = K^2 \sqrt{\frac{EI_{\text{нр}}}{m_1}} = 0,1925^2 \sqrt{\frac{232059 \cdot 9,81}{5}} = 25 \frac{1}{\text{с}}.$$

Период собственных колебаний системы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,25 \text{ с} < 0,45 \text{ с по ДБН}.$$

Величина первой частоты собственных колебаний и их периода, полученные по предложенной методике для систем с бесконечной величиной степеней свободы, не противоречат требованиям ДБН [3].

При поиске рациональной конструкции кроме соблюдения условий прочности, должны выполняться условия устойчивости и жесткости, а также конструктивные ограничения и ограничения на расчетные периоды собственных колебаний. Оптимизационная задача решается в два этапа. На первом этапе находится наилучшая конструкция, при учете только локальных ограничений, на втором – только глобальных [4].

Однако, т.к. полученные значения частот и периодов собственных колебаний предложенной комбинированной конструкции меньше приведенных в ДБН [3], поиск оптимального решения считаем завершенным.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Безухов, Н. И. Динамика сооружений в примерах и задачах [Текст] / Н. И. Безухов. – М.: Стройиздат, 1947. – 200 с.
2. Бутенко, Ю. И. Строительная механика [Текст] / Ю. И. Бутенко. – К.: Вища шк., 1989.
3. ДБН В.2.3-14:2006. Мости та труби. Правила проектування. [Текст]. – Чинний від 2007-02-01. – К.: Мінбуд України, 2006. – 359 с.
4. Китов, Ю. П. Оптимизация статически определимых балок пролетных строений пешеходных мостов [Текст] / Ю. П. Китов, Г. Л. Ватуля // Коммунальное хозяйство городов: науч.-техн. сб. – Вып. 39. – Техніка, 2002. – С. 125-130.

Поступила в редколлегию 01.03.2010.

Принята к печати 10.03.2010.