

ПРОГНОЗ КРЕНОВ ФУНДАМЕНТОВ СООРУЖЕНИЙ НА ВОДОНАСЫЩЕННОМ ОСНОВАНИИ ПРИ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Показано рішення для прогнозу крену прямокутного фундаменту на лінійному пружному ізотропному водонасиченій основі при розрахунковій схемі ґрунтового шару кінцевої товщини. Доведене, що швидкість процесу фільтраційної консолідації основи прямо пропорційна величині коефіцієнта Пуассона основи, відношенню довжини підшви фундаменту до його ширини й обернено пропорційна товщині ґрунтового шару.

Показано решение для прогноза крена прямоугольного фундамента на линейном упругом изотропном водонасыщенном основании при расчетной схеме ґрунтового слоя конечной толщины. Доказано, что скорость процесса фильтрационной консолидации основания прямо пропорциональна величине коэффициента Пуассона основания, отношению длины подошвы фундамента к его ширине и обратно пропорциональна толщине ґрунтового слоя.

The solution for the forecast of incline of the rectangular base on the linear elastic isotropic water-saturated basement under the settlement scheme of a soil layer of a final thickness is shown. It is proved that rate of process of filtration consolidation of the basement is directly proportional to the value of Poisson's coefficient ratio of the basement, division of the foundation base length to its width and inversely proportional to the soil layer thickness.

Проблема

Расчет и прогноз развития кренов фундаментов сооружений, возведенных по расчетной схеме слоя конечной толщины на водонасыщенном основании почти не представлен в ДБН В.2.1-10-2009 «Основания и фундаменты сооружений».

Цель работы

Разработка аналитического решения по прогнозу крена прямоугольного фундамента в рамках модели линейно упругого изотропного водонасыщенного основания при расчетной схеме ґрунтового слоя конечной толщины.

Актуальность

Наблюдения за осадками существующих зданий и строений показывают, что большие осадки нередко сопровождаются общим креном, приводящим к дополнительным, весьма нежелательным деформациям в конструкциях сооружений, затрудняющим их нормальную эксплуатацию. Выложены результаты теоретических исследований закономерностей развития во времени кренов фундаментов с прямоугольной формой подошвы на водонасыщенном ґрунтовом основании. В качестве модели и расчетной схемы основания принят упругий изотропный водонасыщенный ґрунтовой слой конечной толщины. Вносим допущение, что эпюра напряжений на контакте «основание-фундамент» имеет прямолинейные очертания (этой эпюре соответствует расчетная схема абсолютно – гибкого фундамента [1]).

Методика исследования

Задача исследований для математической модели имела следующие исходные. ґрунтовой слой толщиной H подстилается малосжимаемым скальным основанием. На поверхности слоя конечной толщины расположен прямоугольный фундамент со сторонами L и b . На фундамент действует моментная нагрузка $M=Q \cdot e$, где M – действующий на уровне подошвы фундамента опрокидывающий момент, Q – равнодействующая приложенных к фундаменту вертикальных нагрузок, а e – эксцентриситет ее приложения. Предполагается, что в общем случае момент M является функцией времени t .

ґрунтовое основание характеризуется упругими характеристиками – модулем сдвига $G=E/[2 \cdot (1+\nu)]$ и коэффициентом Пуассона ν , где E – модуль общей деформации ґрунта.

При этом реологической характеристикой основания является коэффициент пространственной консолидации $C_v = C_k/3 \cdot (\lambda + 2G)/(3\lambda + 2G)$, где C_k – коэффициент консолидации при компрессии, а λ – константа Лямэ $\lambda = \nu \cdot E/[(1+\nu) \times (1-2\nu)]$ [2, 3, 4, 5]. Предполагается, что моментная нагрузка приложена к фундаменту в момент времени $t=0$.

Рассмотрен случай постоянной во времени моментной нагрузки. В качестве фунда-

$$S(r,t) = W(r,t,H) = \frac{1-\nu}{2\pi GH} \times \int_0^\infty \left[\frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)} - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\text{Sh}^2(a)(1+\text{Ch}(a))^2 a}{[a + \text{Sh}(a) \cdot \text{Ch}(a)]^2} \sum_{i=1,3,5} \frac{i^2 \pi^2}{i^2 \pi^2 + a^2} e^{-\frac{a^2 + i^2 \pi^2}{H^2} C_v t} \right] \cdot J_0\left(\frac{r}{H}, a\right) da. \quad (1)$$

В формуле (1) a – параметр; $\text{Sh}(a)$ и $\text{Ch}(a)$ – соответственно гиперболические синус и косинус; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого ряда с нулевым индексом; r – координата; $W(r,t,H)$ – вер-

ментального используем полученное автором [2] решение (1) задачи о сосредоточенной силе, приложенной к верхней границе слоя конечной толщины. Решение (1) было получено в предположении о том, что на контакте «раздробленный грунт – скала» имеет место фильтрующая прослойка. Если таковая отсутствует, то в (1) следует удвоить толщину грунтового слоя, т.е. вместо H положить $H_1 = 2H$.

тикальное перемещение верхней границы основания; $S(r,t)$ – осадка верхней границы основания [2, 6]. Исследуем граничные (при $t=0$ и $t \rightarrow \infty$) значения (1). При $t \rightarrow 0$ имеем:

$$S(r,0) = W(r,0,H) = \frac{1-\nu}{2\pi GH} \cdot \int_0^\infty \left[\frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)} - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\text{Sh}^2(a) \cdot [1 + \text{Ch}(a)]^2 \cdot a}{a + \text{Sh}(a) \cdot \text{Ch}(a)} \sum_{i=1,3} \frac{i^2 \pi^2}{(i^2 \pi^2 + a^2)^2} \right] \cdot J_0\left(a \frac{r}{H}\right) da.$$

С учетом равенства [7]

$$\sum_{i=1,3} \frac{i^2 \pi^2}{(i^2 \pi^2 + a^2)^2} = \frac{1}{4a} \cdot \frac{\lambda + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)}{[1 + \text{Ch}(a)]^2} \text{ найдем:}$$

$$s(r,0) = \frac{1}{4\pi GH} \int_0^\infty \frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)} \cdot J_0\left(a \frac{r}{H}\right) da. \quad (2)$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$s(r,\infty) = \frac{1-\nu}{2\pi GH} \int_0^\infty \frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)} \cdot J_0\left(a \frac{r}{H}\right) da. \quad (3)$$

Сопоставление (2) и (3) позволило сделать вывод о том, что в процессе фильтрационной консолидации средняя осадка любой точки дневной поверхности слоя конечной толщины увеличится в $2(1-\nu)$ раз. В случае если коэффициент Пуассона грунтового скелета $\nu = 0,5$, то фильтрационная консолидация отсутствует вообще.

Расчет зависимостей «относительный крен – безразмерное время» для слоя конечной толщины выполнялся так. Вначале с использованием зависимостей вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a)\text{Ch}(a)} &\approx \sum_{i=1}^{10} a_{0i} \cdot T_i^*(z_0); \\ z_0 &= \exp(-d_0 a) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

была выполнена аппроксимация первого слагаемого подынтегральной функции выражения (1). Здесь $T_i(x)$ – смещенные полиномы Чебышева [6]. Далее с использованием зависимостей

$$\left. \begin{aligned} \exp(-a^2 c_k t) &\approx \sum_{i=1}^{10} a_{1i} T_i^*(z_1); \\ z_1 &= \exp\left(-d_1 a \cdot \frac{\sqrt{C_v \cdot t}}{H}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

была сделана аппроксимация входящей в (1) экспоненциальной функции. После этого с использованием выражений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{Sh}^2(a) \cdot (1 + \text{Ch}(a))^2}{a + \text{Sh}(a) \cdot \text{Ch}(a)} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{(a^2 + k^2 \pi^2)^2} &\approx \sum_{i=1}^{10} a_{2i} T_i^*(z_2); \\ z_2 &= \exp(-d_2 a) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

была выполнена аппроксимация первых одиннадцати членов входящего в подынтегральную функцию (1) ряда. В результате выполненных

таким образом преобразований подынтегральная функция была представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{Sh}^2(a)}{a + \text{Sh}(a) \cdot \text{Ch}(a)} - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \cdot \frac{\text{Sh}^2(a) \cdot [1 + \text{Ch}^2(a)] \cdot a}{(a + \text{Sh}(a) \cdot \text{Ch}(a))^2} \cdot \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{(a^2 + i^2 \pi^2)^2} \exp\left(-\frac{a^2 + i^2 \pi^2}{H^2} C_\nu t\right) \approx \\ & \approx \sum_{i=1}^{10} a_{0i} T_1^*(z_0) - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \sum_{i_0=1}^{11} \exp\left(-\frac{i^2 \pi^2}{H^2} C_\nu \cdot t\right) \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} \sum_{l=1}^j a_{ijkl} \cdot z_1^{k-1} \cdot z_2^{l-1}; \\ & z_1^{k-1} \cdot z_2^{l-1} = \exp\left(-\left[(l-1)d_1 \sqrt{\frac{C_\nu \cdot t}{H^2}} + 2d \cdot j\right] \cdot a\right). \end{aligned} \right\} (7)$$

Здесь $a_{ijkl} = a_{1i} a_{2j} \cdot c_k \cdot c_l$, где c_k и $c_l - k$ -ый и l -ый коэффициенты смещенных полиномов Чебышева i -ой и j -ой степени.

Далее с использованием соотношения (6) были аналитически вычислены несобственные интегралы вида:

$$\int_0^{\infty} e^{-az} J_0(ar) dr = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (8)$$

В результате равенство (1) было представлено в виде:

$$\left. \begin{aligned} S(r, t) &= \frac{1-\nu}{2\pi G Q} \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^i a_{ij} \varphi_j(H, r) - \frac{2(1-\nu)}{1-\nu} \times \right. \\ & \times \left. \sum_{i_0=1}^{11} e^{-\frac{i^2 \pi^2 C_\nu t}{H^2}} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ijkl} \varphi_{kl}(H, r, t) \right\}; \\ \varphi_j(H, r) &= \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{при } j=1; \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 + H^2(j-1)^2 d_0^2}} & \text{при } j \neq 1; \end{cases} \\ \varphi_{ijkl}(H, r, t) &= \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{при } k=l=1; \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (l-1)^2 d_1^2 C_k t}} & \text{при } k=1 \text{ и } l \neq 1; \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (k-1)^2 d_{2j}^2 H}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l=1; \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left[(l-1)d_1 \sqrt{\frac{C_k t}{H^2}} + (k-1)d_{2j}\right]^2 \cdot H^2}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l \neq 1 \end{cases} \quad (9) \end{aligned} \right\}$$

Далее найдем дифференциал осадки в точке $dg(\xi, \eta)$, которая приложена в точке с координатами (x, y) от элементарной силы $dg(\xi, \eta)$ натами (ξ, η) имеем:

$$\left. \begin{aligned} dS &= \frac{(1-\nu)}{2\pi G} dg(\xi, \eta) \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^i a_{ij} \varphi_j(H, r, x, y, \xi, \eta) - \frac{2(1-\nu)}{1-\nu} \cdot \sum_{i_0=1}^{11} e^{-\frac{i^2 \pi^2 C_\nu t}{H^2}} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ijkl} \cdot \varphi_{kl}(H, t, x, y, \xi, \eta) \right\} \\ \varphi_j(H, x, y, \xi, \eta) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} & \text{при } j=1; \\ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2 d_0^2 (j-1)^2}} & \text{при } j \neq 1; \end{cases} \\ \varphi_{kl}(H, x, y, \xi, \eta) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} & \text{при } k=l=1; \\ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (l-1)^2 d_1^2 C_k t}} & \text{при } k=1 \text{ и } l \neq 1; \\ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (k-1)^2 d_{2j}^2 H^2}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l=1; \\ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \left[(l-1)d_1 \sqrt{\frac{C_k t}{H^2}} + (k-1)d_{2j}\right]^2 \cdot H^2}} & \text{при } \begin{matrix} k \neq 1 \\ l \neq 1 \end{matrix} \end{cases} \quad (10) \end{aligned} \right\}$$

Теперь найдем прогиб основания в направлении оси OX [8], т.е. дифференциал крена при действии моментной нагрузки относительно оси OY . Имеем:

$$d i = \frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{d g(\xi, \eta)(1 - \nu)}{2 \pi G} \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^i a_{ij} \Phi_j^*(x, y, \xi, \eta) - \frac{2(1 - \nu)}{(1 - \nu)} \sum_{i_0=1}^{11} e^{-\frac{i^2 \pi^2 C_k t}{H^2}} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ijkl} \cdot \Phi_{kl}^*(H, t, x, y, \xi, \eta) \right\};$$

$$\Phi_j^*(x, y, \eta, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } j=1; \\ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2 d_0^2 (j-1)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } j \neq 1; \end{cases}$$

$$\Phi_{i,j,k,l}^*(H, x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k=l=1; \\ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (l-1)^2 d_1^2 C_k t]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k=1 \text{ и } l \neq 1; \\ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (k-1)^2 d_2^2 H^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l=1; \\ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \left\{ (k-1)d_{2j} + (l-1)d_1 \sqrt{\frac{C_k t}{H^2}} \right\}^2 H^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } \begin{matrix} k \neq 1 \\ l \neq 1 \end{matrix} \end{cases} \quad (11)$$

Следующим шагом подставляем в (11) значение дифференциала нагрузки $dg(\xi, \eta)$ и проинтегрируем полученное таким образом выражение по площади фундамента на интервале $\xi \in (-b/2, b/2)$ и $\eta \in (-L/2, L/2)$. При этом положим $x = y = 0$ (в этом случае так найден крен в центре фундамента). Имеем:

$$i = \frac{6 Q e}{\pi G b L^3} = \int_{-b/2}^{b/2} d \eta \int_{-L/2}^{L/2} \xi^2 \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} a_{ij} \Phi_j^*(H, \xi, \eta) - \frac{2(1 - \nu)}{(1 - \nu)} \sum_{i_0=1}^{11} e^{-\frac{i^2 \pi^2 C_k t}{H^2}} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ijkl} \cdot \Phi_{kl}^*(H, \xi, \eta) \right\} d \xi;$$

$$\Phi_j^* = \begin{cases} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{при } j=1; \\ \frac{1}{[\xi^2 + \eta^2 + H^2 d_0^2 (j-1)^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } j \neq 1; \end{cases}$$

$$\Phi_{kl}^* = \begin{cases} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k=l=1; \\ \frac{1}{[\xi^2 + \eta^2 + (l-1)^2 d_1^2 C_k t]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k=1 \text{ и } l \neq 1; \\ \frac{1}{[\xi^2 + \eta^2 + (k-1)^2 d_2^2 H^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l=1; \\ \frac{1}{[\xi^2 + \eta^2 + H^2 \left\{ (k-1)d_2 + (l-1)d_1 \sqrt{\frac{C_k t}{H^2}} \right\}^2]^{\frac{3}{2}}} & \text{при } \begin{matrix} k \neq 1 \\ l \neq 1 \end{matrix} \end{cases} \quad (12)$$

Далее представим, что $\frac{\eta^* \cdot b}{2} = \eta$, В этом случае (12) принимает новый вид:

$$\frac{\xi^* \cdot L}{2} = \xi, \quad t^* = \frac{2 C_k t}{b^2}, \quad m = \frac{L}{b} \text{ и } n = \frac{2 H}{b}.$$

$$i = \frac{3Qe}{\pi Gb^3} = \int_{-1}^1 d\eta^* \int_{-1}^1 \xi^2 \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^n a_{ij} \Phi_j^*(\xi^*, \eta^*) - \frac{2(1-\nu)}{(1-\nu)} \sum_{i_0=1}^{11} e^{-\frac{t^2 \pi^2 t}{n^2}} \sum_{i_0=1}^{10} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j a_{ijkl} \cdot \Phi_{kl}(\xi^*, \eta) \right\} d\xi^*;$$

$$\Phi_j^*(\xi^*, \eta^*) = \begin{cases} \frac{1}{(m^* \xi^{*2} + \eta^{*2})^{3/2}} & \text{при } j=1; \\ \frac{1}{[m^* \xi^{*2} + \eta^2 + d_0^2 (j-1)^2 n^2]^{3/2}} & \text{при } j \neq 1; \end{cases}$$

$$\Phi_{kl}^*(\xi^*, \eta^*) = \begin{cases} \frac{1}{(m^* \xi^{*2} + \eta^{*2})^{3/2}} & \text{при } k=l=1; \\ \frac{1}{[m^* \xi^{*2} + \eta^2 + (l-1)^2 d_1^2 t^*]^{3/2}} & \text{при } k=1 \text{ и } l \neq 1; \\ \frac{1}{[m^* \xi^{*2} + \eta^2 + (k-1)^2 d_{2j}^2 n^2]^{3/2}} & \text{при } k \neq 1 \text{ и } l=1; \\ \frac{1}{\left\{ m^* \xi^{*2} + \eta^{*2} + n^2 \left[(l-1) d_1 \sqrt{\frac{t^*}{n^2}} + (k-1) d_{2j} \right]^2 \right\}^{3/2}} & \text{при } \begin{matrix} k \neq 1 \\ l \neq 1 \end{matrix} \end{cases} \quad (13)$$

Выражения (13) интегрировались методом трапеций [8]. При этом для удобства расчетов табулировались вычисленные по формуле (14) значения относительных кренов i_0 и полученные результаты рассматривались в графическом виде [8].

Заключение

Анализ полученных графических зависимостей позволяет сделать четкие выводы. В процессе фильтрационной консолидации крен расположенного на слое конечной толщины на интервале времени $t \in (0, \infty)$ изменяется в $2(1-\nu)$ раз. При этом если коэффициент Пуассона грунтового скелета $\nu \geq 0,5$, то изменения крена во времени не происходит вообще. Чем выше значение коэффициента Пуассона грунтового скелета водонасыщенного слоя конечной толщины, тем быстрее происходит стабилизация крена фундамента. Чем меньше отношение L/b , тем быстрее завершается процесс развития крена во времени. При прочих равных условиях процесс развития крена фундамента с прямоугольной формой подошвы в сторону его большей стороны характеризуется более медленным затуханием, чем процесс развития крена в сторону меньшей стороны фундамента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горбунов-Посадов, М. И., Расчет конструкций на упругом основании [Текст]. – 3-е изд. / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984 – 679 с.
2. Зарицкий, Ю. К. Теория консолидации грунтов [Текст] / Ю. К. Зарицкий. – М.: Наука, 1967 – 270 с.
3. Флорин, В. А. Основы механики грунтов [Текст]. – т. 1 / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1959. – 357 с.
4. Флорин, В. А. Основы механики грунтов [Текст]. – т. 2 / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 543 с.
5. Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьир. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
6. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 840 с.
7. Ватсон, Д. Н. Теория бесселевых функций [Текст] / Д. Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
8. Бабич, Ф. В. Особенности развития крена прямоугольных фундаментов на водонасыщенном основании для слоя конечной толщины [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.02 / Приднепровская гос. академия строительства и архитектуры. – Д., 2006. – 171 с.

Поступила в редколлегию 23.03.2010.
Принята к печати 28.03.2010.